УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ НА МАЂАРСКОМ НАСТАВНОМ ЈЕЗИКУ У СУБОТИЦИ
ÚJVIDÉKI EGYETEM MAGYAR TANNYELVŰ TANÍTÓKÉPZŐ KAR, SZABADKA
SVEUČILIŠTE U NOVOM SADU UČITELJSKI FAKULTET NA MAĐARSKOM NASTAVNOM JEZIKU U SUBOTICI
UNIVERSITY OF NOVI SAD HUNGARIAN LANGUAGE TEACHER TRAINING FACULTY, SUBOTICA

Matematikai módszerek a kutatásban

Gyakorlati példatár a Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar mester szakos hallgatóinak

Papp Zoltán

Újvidéki Egyetem

Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka

Szabadka

Kiadó:

Újvidéki Egyetem,
Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka

Fő- és felelős szerkesztő:

Prof. dr. Pintér Krekić Valéria

Recenzensek:

prof. dr. Takács Márta
prof. dr. Pintér Krekić Valéria
doc. dr. Kovács Elvira

Tördelőszerkesztő:

doc. dr. Papp Zoltán

CIP – Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

517(075.8)(076) **PAPP, Zoltán, 1979-**

Matematikai módszerek a kutatásban [Elektronski izvor] : gyakorlati példatár a Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar mester szakos hallgatóinak / Papp Zoltán. – Szabadka : Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, 2026.

Način pristupa (URL): `https://magister.uns.ac.rs/publ/2026/978-86-81960-48-6`.

Nasl. sa naslovnog ekrana. – Opis zasnovan na stanju na dan: 24. 02. 2026. – Bibliografija.

ISBN 978-86-81960-48-6

а) Математичка анализа -- Практикуми

COBISS.SR-ID 187788809

ISBN: 978-86-81960-48-6

Előszó

A **„Matematikai módszerek a kutatás szolgálatában”** című példatár célja, hogy átfogó és gyakorlatorientált segítséget nyújtson a Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar mesterképzésben részt vevő hallgatóinak – legyen szó tanító, óvodapedagógus vagy kommunikátor szakos képzésről. A példatár olyan matematikai eszközöket és módszereket mutat be, amelyek hasznosak lehetnek a tudományos kutatásban, az adatok elemzésében és az eredmények értelmezésében, és példatárként szolgálhat a Pedagógiai kutatásmódszertan statisztikával című tantárgyhoz.

A fejezetek felépítése úgy lett kialakítva, hogy a hallgatók lépésről lépésre sajátíthassák el a szükséges elméleti alapokat, majd azokat konkrét példákon keresztül alkalmazhassák. A könyv tartalmaz:

- **Elméleti összefoglalókat**, amelyek rendszerezik a legfontosabb fogalmakat és tételeket.
- **Szemléltető példákat**, amelyek megkönnyítik az elmélet megértését.
- **Kidolgozott feladatokat**, amelyek bemutatják a megoldási stratégiákat.
- **Gyakorló feladatokat**, amelyek lehetőséget adnak az önálló munkára és a tudás elmélyítésére.

A példatár témakörei között szerepelnek a numerikus sorok, Taylor- és Fourier-sorok, kétváltozós függvények differenciálhányadosai, szélsőérték-problémák, hibaelmélet, egyenletek és integrálok numerikus megoldása, valamint differenciálegyenletek numerikus módszerei. Ezek az ismeretek nemcsak a matematikai gondolkodás fejlesztését szolgálják, hanem a kutatási munka során felmerülő problémák megoldásában is kulcsfontosságúak.

Reméljük, hogy a példatár hozzájárul a hallgatók szakmai fejlődéséhez, és inspirációt nyújt a matematikai módszerek kreatív alkalmazásához a kutatásban.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Számsorok

1. Definíció. Legyen az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ elemekkel adott egy valós számsorozat. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{1.1}$$

kifejezést végtelen *számsornak* nevezzük, melynek n-edik tagja a_n.

Az

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

összegeket az (1.1) számsor *részletösszegeinek* nevezzük.

2. Definíció. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ határérték, ahol S véges szám és $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a részletösszegek sorozata, akkor a (1.1) sor *konvergens*, és összege S. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ vagy pedig a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ határérték nem létezik, akkor a (1.1) sor nem konvergens, vagyis *divergens*.

A numerikus sorokkal kapcsolatos feladatokban főleg a sorok konvergenciáját vizsgáljuk, és az összegüket keressük.

1. Példa. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ sor összegét, ahol $q \in \mathbb{R}$.

Megoldás. A mértani sorozat első n tagjának összegét a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}.$$

Alkalmazva ezt a képletet, a sor n-edik részletösszegét a következő módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} S_n &= q + q^2 + \cdots + q^n = q(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \\ &= \frac{q(1-q^n)}{1-q} = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

A mértani sor q hányados értékétől függően három esetet különböztethetünk meg:

- $q = 1$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1^k = n$, vagyis $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, így a sor divergens;
- $|q| > 1$: $S = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}) = \frac{q}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} - (-\infty) = \infty$, vagyis a sor divergens;
- $|q| < 1$: $S = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}) = \frac{q}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q}$, vagyis a sor konvergens.

□

1.1 Pozitív tagú sorok

A sorok konvergenciáját kivizsgálhatjuk a definíció szerint úgy, mint az előző példában, vagy pedig a numerikus sorok konvergenciájának kivizsgálására szolgáló kritériumok segítségével.

1. Tétel (Sor konvergenciájának szükséges feltétele)**.** Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Példa. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$ sort.

Megoldás. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 \neq 0$, az előző tétel szerint az adott sor divergens.

□

I. Összehasonlító kritérium: Legyen $a_n \geq 0$ és $b_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, és tételezzük fel, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \geq n_0$ indexre, ahol $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám. Akkor érvényes a:

Majoráns kritérium: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergenciájából következik a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciája.

Minoráns kritérium: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergenciájából következik a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergenciája.

3. Példa. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ sort a majoráns kritérium segítségével.

Megoldás. Mivel az adott sor tagjai mind pozitívak, alkalmazhatjuk a majoráns kritériumot. A feladat megoldásához a következő lemmát alkalmazzuk:

1. Lemma. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ harmonikus sor divergens, ha $\alpha \leq 1$, és konvergens ha $\alpha > 1$.

Az adott sort a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorral majoráljuk. A majoráns sor eleget tesz a majoráns kritériumnak, mivel $a_n = \frac{1}{1+n^2} < b_n = \frac{1}{n^2}$ $n_0 = 1$-re. Az előző lemma szerint a majoráns sor konvergens, mivel $\alpha = 2 > 1$, így az eredeti sor is konvergens.

□

II. Összehasonlító kritérium: Tételezzük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ a_n \geq 0,\ b_n > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor érvényesek a következők:

i) Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, és $0 \leq k < \infty$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

ii) Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens, és $0 \leq k < \infty$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is divergens.

4. Példa. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ sort a II. összehasonlító kritérium segítségével.

Megoldás. Az említett kritérium alkalmazható, mivel a sor mindegyik tagja pozitív. A sor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Legyen $b_n = \frac{1}{n}$. Ekkor érvényes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sorban $\alpha = 1$, a sor divergens az (1. Lemma) szerint. A II. összehasonlító kritérium szerint az adott sor is divergens.

□

Hányadoskritérium (D'Alambert - féle kritérium) (J. L. R. D'Alambert (1717-1783)) Tételezzük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ha $q < 1$, az (1.1) sor konvergens, ha pedig $q > 1$ az (1.1) sor divergens. A sor konvergenciája nem határozható meg a hányadoskritérium segítségével, ha $q = 1$.

5. Példa. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sort a hányadoskritérium segítségével.

Megoldás. Emlékezzünk vissza a faktoriális definíciójára: $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$
Az adott sor mindegyik tagja pozitív, így alkalmazható a hányadoskritérium. A sor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{n!}$, így $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)\cdot n!}$. A hányadoskritérium szerint

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$$

vagyis az adott sor konvergens.

□

Gyökkritérium (Cauchy - féle kritérium) (A. L. Cauchy (1789-1857)) Tételezzük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,\ a_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ha $q < 1$, a (1.1) sor konvergens, ha pedig $q > 1$ az (1.1) sor divergens. A sor konvergenciája nem határozható meg a hányadoskritérium segítségével, ha $q = 1$.

6. Példa. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{2n-1})^n$ sort a gyökkritérium segítségével.

Megoldás. Az adott sor mindegyik tagja pozitív, így alkalmazható a hányadoskritérium. A sor n-edik tagja $a_n = (\frac{n+1}{2n-1})^n$. A gyökkritérium szerint

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1,$$

vagyis az adott sor konvergens.

□

Cauchy - féle integrálkritérium Legyen $f(x),\ x > 0$ nemnegatív, monoton csökkenő függvény. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

sor akkor és csakis akkor konvergens, ha az

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál is konvergens.

7. Példa. Bizonyítsa be az (1. Lemma)-t, vagyis bizonyítsa be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ harmonikus sor divergens $\alpha \leq 1$-re, és konvergens $\alpha > 1$.

Megoldás. Mivel a $\frac{1}{x^\alpha}$ függvény pozitív és monoton csökkenő, alkalmazhatjuk az integrálkritériumot. Tekintsük az $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$ függvényt az adott sor n-edik tagjának. Vizsgáljuk ki a következő improprius integrált konvergencia szempontjából:

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Az α paraméter értékeitől függően a következő esetek jelentkezhetnek:

- $\alpha = 1$-re az integrál nem értelmezett, így az improprius integrál sem értelmezett. Az integrálkritérium szerint a harmonikus sor divergens.
- $\alpha < 1$-re a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$ határérték végtelen, így az improprius integrál divergens, vagyis az integrálkritérium szerint a harmonikus sor is divergens.
- $\alpha > 1$-re a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$ határérték véges, vagyis az improprius integrál konvergens. Az integrálkritérium szerint a harmonikus sor is konvergens.

□

1.2 Tetszőleges tagú sorok

3. Definíció. Az (1.1) tetszőleges tagú sor *abszolút konvergens*, ha a

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{1.2}$$

sor konvergens.

A konvergens sort, mely nem abszolút konvergens, *feltételesen* konvergens sornak nevezzük.

2. Tétel. Ha az (1.1) sor abszolút konvergens, akkor feltételesen is konvergens, viszont általános esetben a fordítottja nem mindig igaz.

3. Tétel. Az abszolút konvergens sor összege nem függ a tagok átrendezésétől, még a feltételesen konvergens sornál a tagok átrendezése kihat a sorösszegre.

Tekintsük a tetszőleges tagú sor egyik speciális fajtáját, a váltakozó előjelű sorokat.

4. Definíció. Azt a sort, melynek tagjai váltakozva pozitívak és negatívak, alternáló, illetve váltakozó előjelű sornak nevezzük:

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots. \tag{1.3}$$

Leibniz kritérium (G. W. Leibniz (1646-1716)) Ha a $\{c_n\},\ n \in \mathbb{N}$ sorozat monoton csökkenő, vagyis $0 \le c_{n+1} \le c_n,\ n \in \mathbb{N}$, és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, akkor az (1.3) alternáló sor konvergens.

8. Példa. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor feltételes és abszolút konvergenciáját.

Megoldás. Vizsgáljuk ki először a sor feltételes konvergenciáját:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

A Leibniz kritérium segítségével megállapíthatjuk, hogy az adott sor konvergens.
Vizsgáljuk ki a sor abszolút konvergenciáját, vagyis ellenőrizzük le a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor feltételes konvergenciáját. Ez a sor harmonikus sor, melyben $\alpha = 1$, ezért divergens. Emiatt az adott sor abszolút divergens.

□

1.3 Műveletek sorokkal

4. Tétel. Legyenek a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok konvergensek, és jelöljük összegüket rendre a-val és b-vel. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

5. Tétel. Legyenek a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok konvergensek, és jelöljük összegüket rendre a-val és b-vel. Ekkor a szorzatuk is konvergens sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

ahol $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots a_n b_1,\ n \in \mathbb{N}$, és érvényes:

(i) Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ sor konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b$.

(ii) Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok legalább egyike abszolút konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ sor is konvergens, és érvényes $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b$.

1.4 Feladatok a számsorokból

1. Feladat. Határozza meg a következő sorok részletösszegeit és sorösszegét:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}),\ a > 0.$

Megoldás. a) Az $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ egyenlőséget alkalmazva az n-edik részletösszeget felírhatjuk a következő alakban:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

A sor összegét meghatározhatjuk a következő sorozat határértékének kiszámításával: $S = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

◇

b) Írjuk fel az n-edik tagot két tört összegeként:

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} = \frac{A(n+3)+B(n+2)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(A+B)+3A+2B}{(n+2)(n+3)}$$

Innen egy lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 3A + 2B &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $A = 1$ és $B = -1$, így a sor n-edik tagját felírhatjuk az $a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$ alakban. Innen az n-edik részletösszeg:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}. \end{aligned}$$

A sor összege:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}$$

◇

c) Írjuk fel az n-edik részletösszeget a következő módon:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) + \cdots + \left(\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^{\frac{n}{2}-1}}\right) = \sum_{k=0}^{n/2-1} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k .
\end{aligned}$$

Az így kapott sor mértani sor, melynek első tagja $a = \frac{1}{2}$, és hányadosa $q = \frac{1}{4}$. A sor $\frac{n}{2}$ tagból áll, és az összegét a következő módon számíthatjuk ki:

$$S_n = \frac{a\left(1 - q^{\frac{n}{2}}\right)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right).$$

Az adott végtelen sor összegét megkapjuk, ha kiszámítjuk a következő határértéket:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{2}{3} \cdot (1 - 0) = \frac{2}{3}.$$

◇

d) Írjuk fel a sor $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ n-edik tagját parciális törtek alakjában:

$$\begin{aligned}
\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2} = \\
&= \frac{A(n^3 + 2n^2 + n) + B(n^2 + 2n + 1) + C(n^3 + n^2) + Dn^2}{n^2(n+1)^2} = \\
&= \frac{n^3(A + C) + n^2(2A + B + C + D) + n(A + 2B) + B}{n^2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Az együtthatók kiegyenlítésével a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
2A + B + C + D &= 0 \\
A + 2B &= 2 \\
B &= 1.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $A = 0,\ B = 1,\ C = 0,\ D = -1$, így az n-edik tagot felírhatjuk a következő módon:

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Az adott sor felírható a következőképpen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

Az n-edik részletösszeg felírható

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

alakban. Innen a sor összege:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1.$$

◇

e) A sor n-edik tagja:

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n.$$

Innen az n-edik részletösszeg:

$$\begin{aligned} S_n &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

A sor összege pedig:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,$$

vagyis az adott sor divergens.

◇

f) Az n-edik részletösszeget megkaphatjuk a következő módon:

$$\begin{aligned} S_n &= (a - \sqrt{a}) + (\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}) + (\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a}) + \cdots + (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}) = \\ &= a - \sqrt[n+1]{a}. \end{aligned}$$

Innen a sor összege:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a - \sqrt[n+1]{a}) = a - 1,$$

mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$.

◇

2. Feladat. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a következő sorokat:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(2n-1)}}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$.

Megoldás. A sorok kivizsgálásánál az 1. Lemmát és az összehasonlító kritériumot alkalmazzuk.

a) A sor $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ n-edik tagját majoráljuk következőképpen:

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{(2n-n)^2} = \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ harmonikus sor $\alpha = 2$-re, az (1. Lemma) alapján konvergens. A majoráns kritérium alapján az adott sor is konvergens.

◇

b) A sor n-edik tagját majoráljuk:

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ sor harmonikus $\alpha = \frac{3}{2}$-re, a majoráns sor konvergens, és a majoráns kritériumnak köszönhetően az eredeti sor is konvergens.

◇

c) Minoráljuk a sor n-edik tagját:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3n(2n-1)}} > \frac{1}{\sqrt{3n \cdot 2n}} = \frac{1}{\sqrt{6n \cdot n}} = \frac{1}{n\sqrt{6}} = b_n.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{6}}$ sor harmonikus $\alpha = 1$-re, így a minoráns sor divergens, és a minoráns kritériumnak köszönhetően az eredeti sor is divergens.

◇

d) Gyöktelenítsük a sor n-edik tagját:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > \frac{1}{\sqrt[3]{n}(\sqrt{n+n}+\sqrt{2n})} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt[3]{n}\sqrt{2n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}n^{5/6}}.\end{aligned}$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}n^{5/6}}$ sor harmonikus $\alpha = \frac{5}{6}$-ra, így ez a sor divergens. A minoráns kritérium szerint az eredeti sor is divergens.

◇

3. Feladat. A hányadoskritérium segítségével vizsgálja ki a következő sorokat konvergencia szempontjából:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$, $a > 0$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{n+1}}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$, $a > 0$.

Megoldás. Könnyen leellenőrizhetjük, hogy az adott sorok pozitív tagú sorok, így alkalmazhatjuk a hányadoskritériumot.

a) Mivel $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{2 \cdot 2^n}{n+1}$,

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 2^n}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1,$$

és az adott sor divergens.

◇

b) Mivel $a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a \cdot a^n}{(n+1)\cdot n!}$,

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a\cdot a^n}{(n+1)\cdot n!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

A hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

◇

c) Emlékezzünk vissza a faktoriális definíciójára, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Mivel $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, a hányadoskritérium szerint:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right)^{\frac{-n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1} < 1, \end{aligned}$$

vagyis az adott sor konvergens.

◇

d) Az $n+1$-edik tagot felírhatjuk $a_{n+1} = (n+1)a^n = (n+1)\cdot a \cdot a^{n-1}$ alakban, így:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot a \cdot a^{n-1}}{na^{n-1}} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = a.$$

A hányadoskritérium szerint, ha $a \geq 1$, a sor divergens, ha pedig $a < 1$, a sor konvergens.

◇

e) Vezessük be a dupla faktoriálist: $n!! := n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot(n-6)\cdots 2\cdot 1$. Az $n+1$-edik tagra érvényes:

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!2^{n+2}} = \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!\cdot 2\cdot 2^{n+1}}.$$

A hányadoskritérium szerint:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!\cdot 2\cdot 2^{n+1}}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{2(2n+2)} = \frac{1}{2} < 1,$$

vagyis a sor konvergens.

◇

f) Írjuk fel az $n+1$-edik tagot a következő módon:

$$a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})} = \frac{a\cdot a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}.$$

Innen

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a\cdot a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = \\ &= \begin{cases} a, & a<1; \\ \frac{1}{2}, & a=1; \\ 0, & a>1. \end{cases} \end{aligned}$$

vagyis a sor konvergens, mivel az a paraméter összes értékére $q < 1$.

◇

4. Feladat. A gyökkritérium segítségével vizsgálja meg a következő sorokat a konvergencia szempontjából:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n},\ a > 1$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 7^n}$;

f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$.

Megoldás. Könnyen leellenőrizhetjük, hogy az adott sorok pozitív tagúak, így alkalmazható a gyökkritérium.

a) A gyökkritérium szerint:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

vagyis a sor konvergens.

◇

b) A sor n-edik tagja: $a_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)$. A gyökkritérium szerint

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{1/n^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} e^{1/n^2} = \frac{1}{3} < 1,$$

így a sor konvergens.

◇

c) Alkalmazva azt, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, a következőt kapjuk:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{a^n}} = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{a} < 1,$$

vagyis az adott sor konvergens.

◇

d) Ugyanazt a határértéket alkalmazva, mint az előző feladatban, a következőt kapjuk:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1.$$

Láthatjuk, hogy az adott sor konvergens.

◇

e) A gyökkritériumot alkalmazva a következőt kapjuk:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2 7^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}7} = \frac{3}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{3}{7} < 1,$$

vagyis a sor konvergens. Beláthatjuk, hogy ezt a feladatot megoldhatjuk a majoráns kritérium segítségével is.

◇

f) A gyökkritériumot alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n+2}{-4}}\right)^{\frac{n+2}{-4}}\right)^{\frac{-4(n+1)}{n+2}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-4(n+1)}{n+2}} = e^{-4} < 1, \end{aligned}$$

vagyis az adott sor konvergens.

◇

5. Feladat. Vizsgálja ki konvergencia szempontjából a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a},\ a > 1$ sort az integrálkritérium segítségével.

Megoldás. A sor n-edik tagját jelöljük $f(n)$-el, vagyis $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^a}$. Az $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^a}$ függvény pozitív ha $x > 1$ és monoton csökkenő. Alkalmazhatjuk az integrálkritériumot, vagyis kivizsgáljuk az $\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergenciáját:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^a}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t \\ t \in [\ln 2, \infty) \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \\ &= \left.\frac{t^{1-a}}{1-a}\right|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{1-a}\left(\lim_{n\to\infty} t^{1-a} - (\ln 2)^{1-a}\right) = \\ &= \frac{-1}{(1-a)(\ln 2)^{a-1}} = \frac{1}{(a-1)(\ln 2)^{a-1}} = const., \end{aligned}$$

A fenti számításban alkalmaztuk azt, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} t^{1-a} = \frac{1}{\infty} = 0$, mivel $a > 1$. Az improprius integrál konvergenciájából következik az adott sor konvergenciája is.

◇

6. Feladat. A Leibniz kritérium segítségével vizsgálja ki a következő alternáló sorok konvergenciáját:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha},\ \alpha > 0$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{2n+1}}$;

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\log n}$.

Megoldás. Mivel az első három feladatban láthatóan alternáló sorokról van szó, ellenőrizzük le a Leibniz kritérium feltételeinek teljesülését. Emlékezzünk vissza, a sorozat monoton csökkenő, ha $c_{n+1} - c_n \leq 0$ vagy pedig $\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq 1$ pozitív tagú sorozatok esetén. A feladatokban adott sorok n-edik tagja által meghatározott sorozatok mind pozitívak, így a monotonitást a második képlet segítségével is meghatározhatjuk.

a) A sor n-edik tagja $c_n = \frac{1}{n^\alpha}$, innen $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. Határozzuk meg:

- a monotonitást:
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha < 1,$$
vagyis a sorozat monoton csökkenő.
- a sorozat határértékét: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

Mivel a Leibniz kritérium mindkét feltétele teljesül, az alternáló sor konvergens.

◇

b) A sor n-edik tagja $c_n = \frac{1}{n(n+1)}$, vagyis $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Ellenőrizzük le a:

- monotonitást:
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n}{n+2} < 1,$$
láthatjuk, hogy a sorozat monoton csökkenő.
- sorozat határértékét: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$.

A Leibniz kritérium szerint az adott alternáló sor konvergens.

◇

c) A sor n-edik tagja $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$. Ellenőrizzük le a Leibniz kritérium feltételeinek teljesülését:

- monotonitás: mivel $c_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$, ezért
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}} = \frac{\sqrt[3]{2n+1}}{\sqrt[3]{2n+3}} < 1,$$
vagyis a c_n sorozat monoton csökkenő.
- a c_n sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} = 0$.

Mivel teljesülnek a Leibniz kritérium feltételei, az adott számsor konvergens.

◇

d) Analizáljuk a cos $n\pi,\ n = 2, 3, 4, \dots$ függvény viselkedését, vagyis ellenőrizzük le az előjelét. Tudjuk, hogy cos $2\pi = 1,$ cos $3\pi = -1,$ cos $4\pi = 1, \dots$, vagyis cos $n\pi = (-1)^n,\ n = 2, 3, \dots$. Innen következik, hogy az adott sor alternáló, melynek n-edik tagja $c_n = \frac{1}{\log n}$. Erre a sorra alkalmazhatjuk a Leibniz kritériumot.

- Monotonitás:
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{\log(n+1)}}{\frac{1}{\log n}} = \frac{\log n}{\log(n+1)} < 1,$$
mivel a logaritmus függvény növekvő.
- Sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0.$

Az adott sor konvergens a Leibniz kritérium szerint.

◇

7. Feladat. Vizsgálja ki az adott sorok feltételes és abszolút konvergenciáját:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n^2+3}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}},\ a \neq 0.$

Megoldás. Először a sorok abszolút konvergenciáját vizsgáljuk ki, majd utána a feltételes konvergenciát, mivel az abszolút konvergenciából következik a feltételes.

a) Ellenőrizzük le a következő sor konvergenciáját: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n!}{n^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Ennek a sornak a konvergenciáját már egyszer kivizsgáltuk a *3. feladatban, a c) alatt* a hányadoskritérium segítségével. Az említett feladat szerint a sor konvergens, vagyis a feladatban adott sor abszolút konvergens. A sor abszolút konvergenciájából következik a feltételes konvergencia is.

◇

b) Vizsgáljuk ki a következő sor konvergenciáját: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$. Mivel pozitív tagú sorról van szó, a gyökkritériumot fogjuk alkalmazni.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

vagyis a sor konvergens. Ebből következik, hogy a feladatban adott sor abszolút konvergens, és így feltételesen is konvergens.

◇

c) Tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{5n^2+3}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+3}$ sort. Ennek a sornak az n-edik tagját minoráljuk, majd alkalmazzuk a minoráns kritériumot.

$$a_n = \frac{n}{5n^2+3} > \frac{n}{5n^2+3n^2} = \frac{n}{8n^2} = \frac{1}{8n} = b_n.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n}$ sor harmonikus $\alpha = 1$-re. Az (1. Lemma) szerint ez a sor divergens. A minoráns kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+3}$ sor is divergens. Ennek következtében a feladatban adott sor nem abszolút konvergens!

Vizsgáljuk ki a sor feltételes konvergenciáját. Mivel a sor alternáló, a Leibniz kritériumot alkalmazzuk.

- Monotonitás:
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{n+1}{5(n+1)^2+3}}{\frac{n}{5n^2+3}} = \frac{5n^3+5n^2+3n+3}{5n^3+10n^2+8n} < 1,$$
mivel $n = 1, 2, \ldots$. Innen látszódik, hogy a c_n sorozat monoton csökkenő.
- A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5n^2+3} = 0.$

Mivel a Leibniz kritérium feltételei teljesülnek, a feladatban adott sor feltételesen konvergens.

◇

d) Tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ sort. Mivel a sor tagjai pozitívak, alkalmazhatjuk a hányadoskritériumot:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)a^{2n+2}}}{\frac{1}{(n+1)a^{2n}}} = \frac{1}{a^2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{a^2}.$$

Vizsgáljuk ki a fenti határértéket az $a \neq 0$ paraméter függvényében:

- ha $|a| > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és az adott sor konvergens, így a feladatban adott sor abszolút konvergens, ennek köszönhetően feltételesen is konvergens;
- ha $|a| \leq 1$, akkor a sor nem konvergens, így a feladatban adott sor sem abszolút konvergens. Mivel alternáló sorról van szó, ellenőrizzük le a feltételes konvergenciát a Leibniz kritérium segítségével.
  - A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a^{2n}} = \infty$, mivel $|a| \geq 1$.
  - Monotonitás: nem vizsgáljuk ki, mivel az előző feltétel sem teljesült.

A Leibniz kritérium szerint a sor feltételesen divergens.

◇

1.4.1 Gyakorló feladatok

8. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ sor n-edik részletösszegét és a sor összegét.

9. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+5}$ sor n-edik részletösszegét és a sor összegét.

10. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ sor n-edik részletösszegét és a sor összegét.

11. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ sort konvergencia szempontjából.

12. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$ sort konvergencia szempontjából.

13. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-2)^{2n-1}}$ sort konvergencia szempontjából.

14. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ sort konvergencia szempontjából a hányadoskritérium segítségével.

15. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)3^{n+1}}{n!}$ sort konvergencia szempontjából a hányadoskritérium segítségével.

16. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(2n-1)4^n}$ sort konvergencia szempontjából a hányadoskritérium segítségével.

17. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{4n-1}\right)^n$ sort konvergencia szempontjából a gyökkritérium segítségével.

18. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{7^n}$ sort konvergencia szempontjából a gyökkritérium segítségével.

19. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{100}e^{-2n}$ sort konvergencia szempontjából a gyökkritérium segítségével.

20. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\ln^n n}}$ sort konvergencia szempontjából a gyökkritérium segítségével.

21. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ sort konvergencia szempontjából az integrálkritérium segítségével.

22. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ sort konvergencia szempontjából az integrálkritérium segítségével.

23. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ sort konvergencia szempontjából az integrálkritérium segítségével.

24. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ alternáló sort a Leibniz kritérium segítségével.

25. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n^2+1}{n(2n-1)}$ alternáló sort a Leibniz kritérium segítségével.

26. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ alternáló sort a Leibniz kritérium segítségével.

27. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$ alternáló sort a Leibniz kritérium segítségével.

28. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$ sor abszolút és feltételes konvergenciáját.

29. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^5}$ sor abszolút és feltételes konvergenciáját.

30. Feladat. Vizsgálja ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ sor abszolút és feltételes konvergenciáját.

2. fejezet

Függvénysorok

5. Definíció. Azt a sorozatot, melynek tagjait valamely $X \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvények képezik, *függvénysorozatnak* nevezzük. A függvénysorozatot felírhatjuk a következő alakban:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,\ x \in X,$$

vagy pedig röviden $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Hasonló módon definiáljuk a függvénysorokat is. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X \tag{2.1}$$

sort, ahol az $u_n,\ n \in \mathbb{N}$ függvények az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezettek, *függvénysornak* nevezzük.

6. Definíció. A függvénysor olyan x változóinak X halmazát, melyre a 2.1 függvénysor konvergens, a függvénysor *konvergenciatartományának* nevezzük.

7. Definíció. Ha x a 2.1 függvénysor konvergenciatartományába tartozik, akkor az

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

függvényt a függvénysor n-edik részletösszegének nevezzük, még az $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ határértéket a függvénysor összegének, az $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ különbséget pedig a függvénysor maradékának nevezzük.

2.1 Hatványsorok

Hatványsornak a függvénysor speciális alakját nevezzük.

8. Definíció. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{2.2}$$

alakú függvénysort *hatványsornak* nevezzük.

6. Tétel. Minden hatványsornál kiszámítható az olyan $R > 0$ szám, melyre ha $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, a sor konvergens, ha pedig $x \notin (x_0 - R, x_0 + R)$, a sor divergens. Az $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumot a hatványsor konvergenciatartományának, míg az R számot konvergenciasugárnak nevezzük. A konvergenciatartomány széleiben, vagyis az $x = x_0 \pm R$-ben a hatványsor lehet konvergens vagy divergens, így itt külön le kell ellenőrizni a konvergenciát.

A hatványsorral kapcsolatos feladatoknál általában a konvergenciatartomány meghatározása a cél. A konvergenciasugarat a *Cauchy - Hadamard** és a *Dirichlet* † képlet segítségével lehet kiszámítani:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ Cauchy - Hadamard képlet;} \tag{2.3}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ Dirichlet képlet.} \tag{2.4}$$

9. Példa. Számítsa ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát, konvergenciatartományát, és vizsgálja ki a sorok konvergenciáját a konvergenciatartomány széleiben:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

Megoldás. a) A sor konvergenciasugarát a Cauchy - Hadamard képlet segítségével számítjuk ki. A sor n-edik tagja: $a_n = \frac{1}{n}$.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|}} = 1$$

Mivel $x_0 = 0$, a konvergenciatartományt felírhatjuk a következő módon:

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R) = (0 - 1, 0 + 1) = (-1, 1).$$

A hatványsor konvergenciáját a konvergenciatartomány széleiben a megfelelő számsorok kivizsgálásával fogjuk megállapítani.

- Ha $x = -1$, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ számsort kapjuk. Ez egy alternáló számsor, így alkalmazhatjuk a Leibniz kritériumot:
  - monotonitás: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$, vagyis a $\{c_n\}$ sorozat monoton csökkenő;
  - a sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

  Mivel a Leibniz kritérium feltételei teljesülnek, a számsor konvergens.
- Ha $x = 1$, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ számsort kapjuk. Ez a sor harmonikus, és mivel $\alpha = 1$, a sor divergens.

Az előző analízist szem előtt tartva, felírhatjuk a hatványsor konvergenciatartományát: $[-1, 1)$.

□

*J. Hadamard (1865-1963)
†J. Dirichlet (1805-1859)

b) A sor konvergenciasugarát a Dirichlet képlet segítségével számítjuk ki. A képletet a hatványsor $a_n = n+1$ n-edik tagjára és az $n+1$-edik tagjára alkalmazzuk:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1.$$

Mivel $x_0 = 0$, a konvergenciatartomány $(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1)$. Vizsgáljuk ki a hatványsor konvergenciáját a konvergenciatartomány széleiben.

- Ha $x = -1$, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ számsor konvergenciáját kell kivizsgálni. Ez a sor alternáló, így a Leibniz kritériumot alkalmazzuk.
  - A sorozat monotonitása: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{n+1} > 1$, vagyis a sorozat monoton növekvő.

  Mivel a Leibniz kritérium feltételei nem teljesülnek, így a számsor divergens.
- Ha $x = 1$, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)$ számsort kell kivizsgálni konvergencia szempontjából. Ez a számsor is divergens.

Mivel a hatványsor divergens a konvergenciatartomány széleiben, a konvergenciatartomány felírható $(-1, 1)$ alakban.

□

A hatványsor konvergenciasugarának és a konvergenciatartományának meghatározása mellett néha célszerű a függvényeket hatványsor alakjában felírni valamely x_0 pont környékében. Az ilyen feladatok fontosak, mivel egyes műveleteket, mint pl. a derivált- és integrálszámítást néha könnyebb a függvény megfelelő hatványsorán elvégezni, mint magán a függvényen.

9. Definíció. Legyen az f függvény tetszőlegesen sokszor differenciálható az x_0 pontban. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \tag{2.5}$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

hatványsort a függvény *Taylor-sorának*[‡] nevezzük az x_0 pont környezetében.

10. Definíció. Ha az f függvény Taylor-sorba fejthető az x_0 pont körül, akkor a függvényt *analitikusnak* nevezzük az x_0 pont környezetében.

11. Definíció. Ha a 2.5 képletben $x_0 = 0$, akkor a kapott hatványsort a függvény *Maclaurin-sorának*[§] nevezzük:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \tag{2.6}$$
$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

[‡]B. Taylor (1685-1731)

[§]C. Maclaurin (1698-1746)

Mivel az esetek többségében nem lehetséges kiszámítani a függvény végtelen sok deriváltját, vagyis nem tudjuk meghatározni a Taylor-sor összes tagját, ezért a gyakorlatban a függvényt közelítjük (approximáljuk) az n-ed fokú Taylor-polinomjával. A Taylor-polinomot felírhatjuk a következő alakban:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \tag{2.7}$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Hasonló módon felírhatjuk a függvény n-ed fokú Maclaurin polinomját is, ha az előző képletbe behelyettesítjük az $x_0 = 0$-t.

A függvény ilyennemű approximálásánál hibát ejtünk, mivel egy végtelen hatványsort helyettesítünk egy véges polinommal. Jelöljük $R_{n+1}(x)$-el a függvény n-ed fokú Taylor-polinommal való approximálásánál keletkező hibát (maradékot). Ekkor a függvényt az x_0 pont környezetében a $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$ alakban írhatjuk fel.

10. Példa. Az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvényt fejtse Taylor-sorba az $x_0 = -1$ körül és határozza meg az így kapott hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. Határozzuk meg először a függvény n-ed fokú Taylor-polinomját úgy, hogy kiszámítjuk a függvény pár deriváltjának értékét az $x_0 = -1$ pontban.

$$\begin{array}{rclrclclcl}
 & & & f(-1) & = & \frac{1}{(-1)^2} & = & 1 & = & 1!; \\
f'(x) & = & \frac{-2}{x^3}, & f'(-1) & = & \frac{-2}{(-1)^3} & = & 2 & = & 2!; \\
f''(x) & = & \frac{6}{x^4}, & f''(-1) & = & \frac{6}{(-1)^4} & = & 6 & = & 3!; \\
f'''(x) & = & \frac{-24}{x^5}, & f'''(-1) & = & \frac{-24}{(-1)^5} & = & 24 & = & 4!; \\
 & \vdots & & & \vdots & & & & & \\
 & & & f^{(n)}(-1) & = & \cdots & & & = & (n+1)!
\end{array}$$

Innen a Taylor-polinomot felírhatjuk a következő alakban:

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= 1 + \frac{2!}{1!}(x+1) + \frac{3!}{2!}(x+1)^2 + \cdots + \frac{(n+1)!}{n!}(x+1)^n \\
&= 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + \cdots + (n+1)(x+1)^n.
\end{aligned}$$

A Taylor-sort pedig felírhatjuk az $\frac{1}{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$ alakban. A kapott hatványsor konvergenciasugarát a Dirichlet képlet segítségével számítjuk ki:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1.$$

Innen meghatározhatjuk a konvergenciatartományt is:

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R) = (-1-1, -1+1) = (-2, 0).$$

Ellenőrizzük le a konvergenciát a konvergenciatartomány végeiben:

- Ha $x = -2$, a megfelelő számsor $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)2^n$ alakú. Ez a sor alternáló, így a konvergenciát a Leibniz kritérium segítségével vizsgáljuk ki:
  - a sorozat monotonitása: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)} = \frac{2(n+2)}{n+1} > 1.$

  Mivel a Leibniz kritérium feltételei nem teljesülnek, így a számsor nem konvergens.
- Ha $x = 0$, a megfelelő számsor $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)$ alakú. Ez a sor divergens.

A konvergeciatartományt fel lehet írni a következő alakban: $(-2, 0)$.

□

Az e^x, sin x, cos x, ln $(1+x)$ i $(1+x)^m$ függvények Maclaurin-sora felírható a következő alakban:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}; \tag{2.8}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}; \tag{2.9}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}; \tag{2.10}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ -1 < x \leq 1. \tag{2.11}$$

11. Példa. Fejtse Maclaurin-sorba az $f(x) = e^{-x^2}$ függvényt.

Megoldás. A függvény Maclaurin-sorbafejtéséhez az e^x függvény 2.8 Maclaurin-sorát használjuk fel:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.$$

□

2.2 Fourier sorok

A Fourier sorok olyan függvénysorok, melyek tagjai trigonometrikus függvények. A műszaki tudományokban a periodikus függvényeket gyakran célszerűbb Fourier[¶] sorok alakjába felírni. Nagyon fontos kérdés, hogy a függvény Fourier sorba fejthető-e, és milyen feltételek mellett fejthető Fourier sorba.

7. Tétel (a függvény Fourier sorba fejtéséről (Dirichlet))**.** Az $f(x)$ függvény az (a, b) intervallumon eleget tesz a Dirichlet feltételeknek, ha az adott intervallumon:

1. egyenletesen korlátos, vagyis minden $x \in (a, b)$-re létezik olyan $M > 0$, melyre érvényes $|f(x)| \leq M$;

[¶]J. Fourier (1768-1830)

2. legfeljebb véges számú elsőfajú szakadási pontja van a függvénynek, vagyis az adott intervallum mindegyik pontjában létezik a függvény véges bal- és jobb oldali határértéke;

3. a függvénynek legfeljebb véges számú szigorú szélsőértéke van.

Ha az $f(x)$ függvény eleget tesz a Dirichlet feltételeknek a $(-\pi, \pi)$ intervallumon, akkor a függvény Fourier sorba fejthető minden olyan $x \in (-\pi, \pi)$ pontban, melyben a függvény folytonos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{2.12}$$

az a_0, a_n, b_n együtthatók kiszámíthatók a következő képletekkel:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \tag{2.14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Ha az $f(x)$ függvény páros, vagyis $f(-x) = f(x)$ minden x-re, akkor a fenti képletek egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} f(-x)\sin(-nx)\,(-\mathrm{d}x) + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} -f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right] = 0,
\end{aligned}$$

így a Fourier sor $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ alakú lesz. Hasonló módon számítjuk ki az a_n együtthatót is:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} f(-x)\cos(-nx)\,(-\mathrm{d}x) + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} -f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) cos nx\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ha az $f(x)$ függvény páratlan, vagyis $f(-x) = -f(x)$ minden x-re, hasonló módon kapjuk, hogy

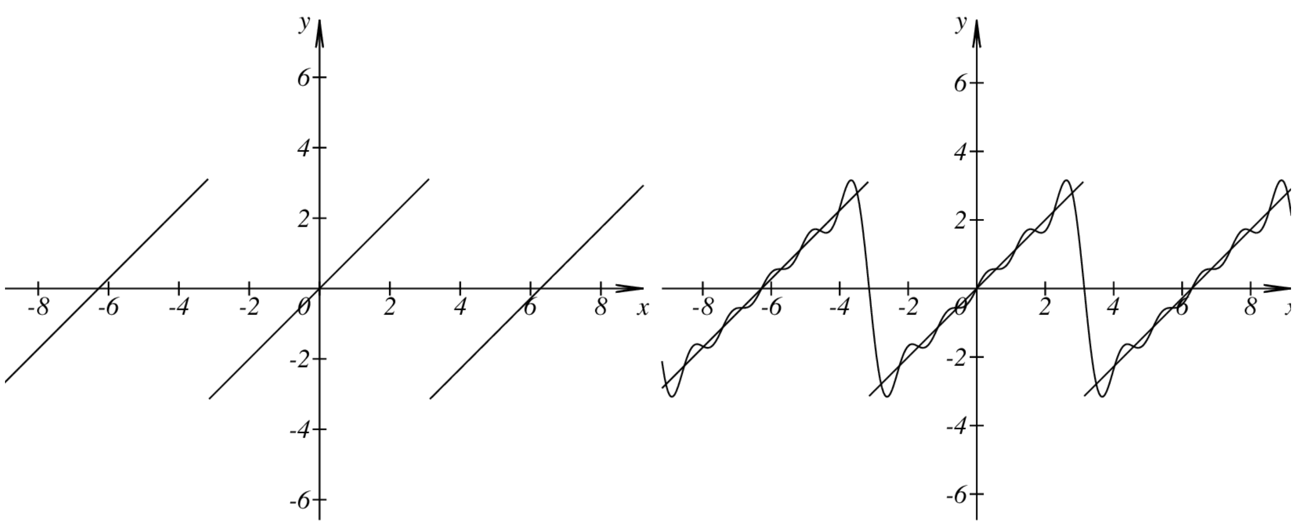
$a_0 = 0, a_n = 0$ és $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$. A Fourier sort ekkor felírhatjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ alakban.

12. Példa. Rajzolja le az $f(x) = x, \quad f(x) = f(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt, melynek alapperiódusa $[-\pi, \pi)$. Írja fel a függvény Fourier sorát az adott intervallumon.

Megoldás. Rajzoljuk le az adott periodikus függvényt. A 2.1 ábra bal oldalán a függvény grafikonja látható, míg az ábra jobb oldalán a függvény Fourier sorral való approximációját ábrázoltuk $n = 5$-re. Az adott függvény páratlan, mivel $f(-x) = -x = -f(x)$, ezért $a_0 = 0, a_n = 0$. A függvény páratlansága a grafikonról is látszódik. Csak a b_n együtthatót kell kiszámolni. A számításban alkalmazzuk azt, hogy $\sin n\pi = 0$ $n = 1, 2, \ldots$ és $\cos n\pi = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \begin{vmatrix} u=x & dv=\sin nx \, dx \\ du=dx & v=-\frac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \left(-\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) \right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{(-1)^n}{n} + 0 + \frac{1}{n}\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\pi(-1)^n}{n} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$



2.1. ábra: Az $y = x$ periodikus függvény és approximációja Fourier sorral

A függvény Fourier sorát felírhatjuk a következő alakban:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

$\square$

8. Tétel. A $(0, \pi)$ intervallumon adott függvény kibővíthető a $(-\pi, 0)$ intervallumra mint páros vagy mint páratlan függvény, vagyis a függvény Fourier sorba fejthető a $(0, \pi)$ intervallumon csak szinuszos vagy csak koszinuszos tagok segítségével.

13. Példa. Az $f(x) = 2$ függvényt fejtse Fourier sorba csupa szinuszos tagokkal a $(0, \pi)$ intervallumon.

Megoldás. Mivel az adott függvényt csak szinuszos tagú Fourier sorba kell fejteni, ezért a függvényt a $(-\pi, 0)$ intervallumon páratlan függvényre bővítjük. Innen következik, hogy $a_0 = a_n = 0$. A b_n együtthatóra érvényes, hogy:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = \\
&= \left|\begin{array}{c} nx{=}t \\ n\,\mathrm{d}x{=}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x{=}\frac{}{n} \end{array}\right| = \frac{-4}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{-4}{\pi n}(\cos n\pi - \cos 0) = \\
&= \frac{-4}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{8}{\pi n}, & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Így a Fourier sort felírhatjuk a következő alakban:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)} \sin (2k+1)x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin (2k+1)x.$$

$\square$

A 2π-nél különböző periódussal rendelkező függvényeket is Fourier sorba fejthetjük. Tekintsük a $2l,\ l \in \mathbb{R}$ periódusú függvényt. Ez a függvény is Fourier sorba fejthető a $(\lambda, \lambda + 2l)$ intervallumon, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. Tétel. A $2l,\ l \in \mathbb{R}$ periódussal rendelkező függvény Fourier sorba fejthető, melynek együtthatói kiszámíthatók a következő képletekkel:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \tag{2.17}$$

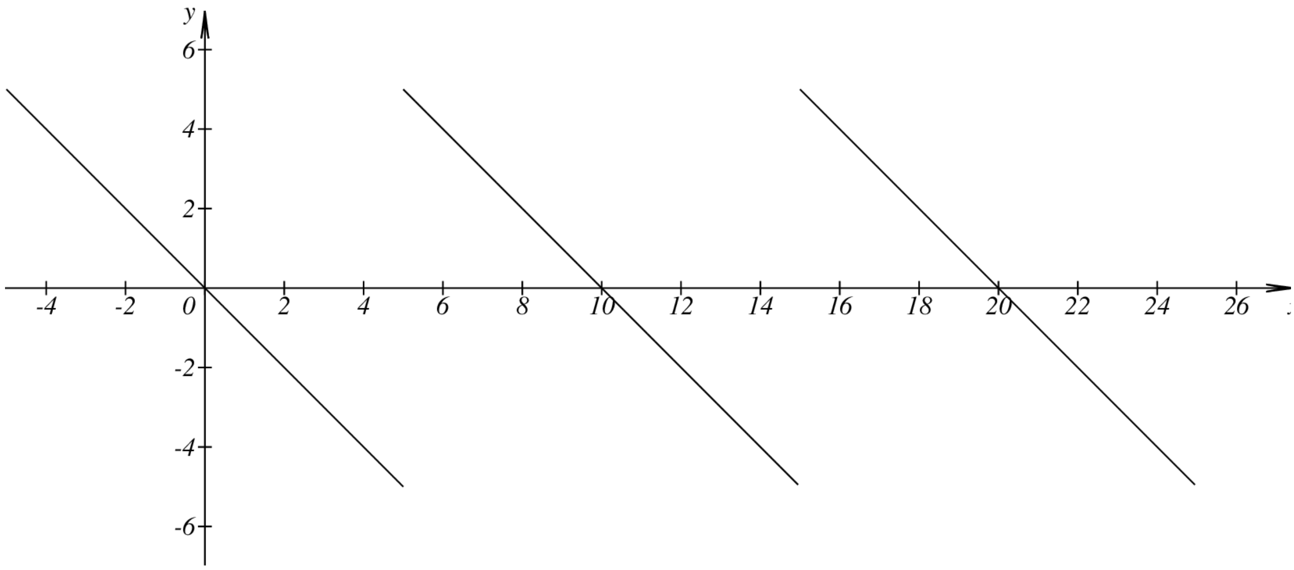
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

A Fourier sor alakja:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{2.19}$$

14. Példa. A $(5, 15)$ intervallumon fejtse Fourier sorba a $f(x) = 10 - x$ függvényt.

Megoldás. Rajzoljuk le a függvény grafikonját, majd vizsgáljuk ki a függvényt párosság szempontjából. Mivel



2.2. ábra: Az $y = 10 - x$ periodikus függvény

$f(-x) \neq \pm f(x)$, első ránézésre a függvény se nem páros se nem páratlan. Ha viszont a függvény 2.2 grafikonját tekintjük, látható, hogy a függvény páratlan, vagyis elég kiszámítani a b_n együtthatót. Mivel a függvényt a $(5, 15)$ intervallumon kell Fourier sorba fejteni, így $\lambda = 5, l = 5$, az alapperiódus pedig 10. Az együttható számításánál alkalmazzuk a parciális integrálást és a következő identitásokat: $\sin 3n\pi = \sin n\pi = 0$, mivel $n = 1, 2, \ldots$ és $\cos 3n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l} \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \int_{5}^{15} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} \,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 10 - x & \mathrm{d}v = \sin \frac{n\pi x}{5} \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x & v = \int \sin \frac{n\pi x}{5} \,\mathrm{d}x = -\frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{5} \left[\frac{-5(10 - x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} - \frac{5}{n\pi} \int_5^{15} \cos \frac{n\pi x}{5} \,\mathrm{d}x \right] = \\
&= \frac{1}{5} \left[\frac{25}{n\pi} \cos 3n\pi + \frac{25}{n\pi} \cos n\pi - \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} \right] = \\
&= \frac{1}{5} \left[\frac{50}{n\pi} \cos 3n\pi - \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 (\sin 3n\pi - \sin n\pi) \right] = \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{50}{n\pi} \cos 3n\pi = \frac{10 \cos 3n\pi}{n\pi} = \frac{10(-1)^n}{n\pi},
\end{aligned}
$$

A Fourier sor felírható a következő alakban:

$$10 - x = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}.$$

□

A Fourier sornak a 2.12 trigonometrikus alakján kívül, amit főleg a matematikában alkalmaznak, létezik komplex alakja is. A komplex alakot főleg a technikai tudományokban alkalmazzák. A Fourier sor komplex alakját az $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ és $e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$ Euler[‖] képletek segítségével kaphatjuk meg:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{2.20}$$

ahol $c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ n \geq 1$. Az a_0, a_n és b_n együtthatókat korábban definiáltuk.

15. Példa. Számítsa ki az $f(x) = e^x,\ -\pi \leq x < \pi,\ f(x) = f(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvény Fourier sor komplex alakjában a c_n együtthatót.

Megoldás. A függvény se nem páros, se nem páratlan, így ki kell számítani az a_0, a_n, b_n együtthatókat.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

Az a_n együttható kiszámításához ki kell számítani a következő integrált:

$$\begin{aligned}
I &= \int e^x \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \cos nx & \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -n \sin nx \mathrm{d}x & v = e^x \end{vmatrix} = \\
&= e^x \cos nx + n \int e^x \sin nx \, \mathrm{d}x = \\
&= \begin{vmatrix} u = \sin nx & \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = n \cos nx \mathrm{d}x & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \cos nx + \\
&+ n \left(e^x \sin nx - n \int e^x \cos nx \, \mathrm{d}x \right) = \\
&= e^x \cos nx + n \left(e^x \sin nx - nIx \right) \\
(1 + n^2) I &= e^x (\cos nx + n \sin nx) \\
I &= \frac{e^x}{1 + n^2} (\cos nx + n \sin nx).
\end{aligned}$$

Innen az a_n együttható kiszámítható a következő módon:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x}{1 + n^2} (\cos nx + n \sin nx) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{\pi}}{1 + n^2} \cos n\pi - \frac{e^{-\pi}}{1 + n^2} \cos(-n\pi) \right] = \\
&= \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n}{\pi (1 + n^2)}.
\end{aligned}$$

[‖]L. Euler (1707-1783)

A b_n együttható kiszámításához ki kell számítani a következő integrált:

$$\begin{aligned}
J &= \int e^x \sin nx \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \sin nx & \mathrm{d}v = e^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = n\cos nx\mathrm{d}x & v = e^x \end{array} \right| = \\
&= e^x \sin nx - n \int e^x \cos nx \,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = \cos nx & \mathrm{d}v = e^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -n\sin nx\mathrm{d}x & v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin nx - \\
&- n\left(e^x \cos nx + n \int e^x \sin nx \,\mathrm{d}x \right) = \\
&= e^x \sin nx - ne^x \cos nx - n^2 J \\
(1+n^2)J &= e^x(\sin nx - n\cos nx) \\
J &= \frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx - n\cos nx).
\end{aligned}$$

Innen b_n együttható:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx - n\cos nx) \right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{e^{\pi}}{1+n^2}(\sin n\pi - n\cos n\pi) - \\
&- \frac{e^{-\pi}}{1+n^2}(\sin(-n\pi) - n\cos(-n\pi))\Big] = \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[-e^{\pi}n(-1)^n + ne^{-\pi}(-1)^n \right] = \\
&= \frac{(e^{-\pi}-e^{\pi})(-1)^n n}{\pi(1+n^2)}.
\end{aligned}$$

A komplex alakú Fourier sor együtthatóját a következő módon lehet kiszámítani:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}); \\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})(-1)^n}{2\pi(n^2+1)}\,(1+in)\,; \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})(-1)^n}{2\pi(n^2+1)}\,(1-in)\,.
\end{aligned}$$

□

2.3 Feladatok a függvénysorokból

31. Feladat. Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát, konvergenciatartományát, és vizsgálja meg a hatványsorok konvergenciáját a konvergenciatartomány széleiben:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 4^n}$.

Megoldás. A konvergenciasugarat a Cauchy - Hadamard képlet segítségével számítjuk ki.

a) A hatványsor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{n^n}$. Innen a konvergenciasugár:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n^n}|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Mivel a konvergenciasugár végtelen, így a hatványsor konvergenciatartománya is végtelen, vagyis a hatványsor konvergens minden $x \in \mathbb{R}$-re, így nincs értelme vizsgálni a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

◇

b) Észrevehetjük, hogy, $x_0 = -3$. A hatványsor n-edik tagja $a_n = n^n$. Innen a konvergenciasugár:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Mivel $R = 0$, a hatványsor csak $x = x_0$-ra, vagyis $x = -3$-ban konvergens.

◇

c) A hatványsor n-edik tagja $a_n = 3^{n^2}$, így:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3^{n^2}|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 3^n} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

vagyis a konvergenciasugár ugyanaz, mint az előző feladatnál. A hatványsor csak $x = x_0$-ra, vagyis $x = 0$-ban konvergens.

◇

d) A hatványsor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{n \cdot 4^n}$, innen pedig a konvergenciasugár:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n \cdot 4^n}|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

A konvergenciatartomány $x \in (-4, 4)$. Vizsgáljuk ki a hatványsor konvergenciáját a konvergenciatartomány széleiben.

- Ha $x = -4$, a következő számsort kapjuk: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n \cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Ez egy alternáló sor, így a Leibniz kritériumot alkalmazzuk. Mivel a sor n-edik tagja $c_n = \frac{1}{n}$ által alkotott sorozat monoton csökkenő: $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$, és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, a megfelelő számsor konvergens, vagyis a hatványsor konvergens az $x = -4$ pontban.

- Ha $x = 4$, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n \cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ numerikus sort kapjuk. Ez a sor harmonikus, és $\alpha = 1$. Innen következik a divergencia, vagyis a hatványsor divergens az $x = 4$ pontban.

A konvergenciatartomány felírható a követező alakban $x \in [-4, 4)$.

◇

32. Feladat. Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát, konvergenciatartományát és vizsgálja meg a hatványsorok konvergenciáját a konvergenciatartomány széleiben:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}(x-5)^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n, \ a > 1$.

Megoldás. A hatványsorok konvergenciasugarát a Dirichlet képlet segítségével határozzuk meg.

a) A hatványsor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{n!}$, így:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Mivel a konvergenciasugár végtelen, a konvergenciatartomány is az, vagyis a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ konvergens. Emiatt a hatványsor konvergenciáját a konvergenciatartomány széleiben nem vizsgáljuk.

◇

b) Mivel $x_0 = -3$, a hatványsor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{n^2}$. Innen

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

A konvergenciatartomány $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, vagyis $x \in (-4, -2)$. Ellenőrizzük le a megfelelő számsorokat a konvergenciatartomány széleiben.

- Ha $x = -4$, tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ számsort. Vizsgáljuk ki a számsor abszolút konvergenciáját, mivel az abszolút konvergenciából következik a feltételes konvergencia is. Ez a numerikus sor abszolút konvergens, mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor harmonikus és $\alpha = 2 > 1$.
- Ha $x = -2$, tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ számsort. Ez a sor harmonikus és $\alpha = 2 > 1$, így konvergens.

A konvergenciatartományt felírhatjuk az $x \in [-4, -2]$ alakban.

◇

c) Mivel $x_0 = 5$, a hatványsor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{4^n}$. Innen

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4.$$

A konvergenciatartomány $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, vagyis $x \in (1, 9)$. Vizsgáljuk ki a megfelelő számsorokat konvergencia szempontjából a konvergenciatartomány széleiben:

- Ha $x = 1$, a számsor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ alakú. Mivel a sor alternáló, a Leibniz kritériumot alkalmazzuk. A sor n-edik tagja $c_n = 1$, és az általa alkotott sorozat nem monoton csökkenő, így ez a numerikus sor divergens.
- Ha $x = 9$, a megfelelő numerikus sor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ alakú. Ez a sor is divergens.

Mivel a hatványsor a konvergenciatartomány mindkét szélében divergens, így a konvergenciatartományt felírhatjuk $x \in (1, 9)$ alakban.

◇

d) A hatványsor n-edik tagja $a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}$, innen pedig $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}} = \frac{(n+1)n!}{a^{(n+1)^2}}$.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)n!}{a^{(n+1)^2}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n^2+2n+1}}{(n+1)a^{n^2}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n^2} \cdot a^{2n+1}}{(n+1)a^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{(n+1)} = \infty, \end{aligned}$$

mivel ha $a > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$. Az adott hatványsor konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ pontra, így nincs értelme a konvergencia kivizsgálásának a konvergenciatartomány széleiben.

◇

33. Feladat. Fejtse Maclaurin-sorba a következő függvényeket:

a) $f(x) = e^x$;

b) $f(x) = \sin x$;

c) $f(x) = \cos x$;

d) $f(x) = \ln(1 + x)$.

Megoldás. Mivel a függvényeket Maclaurin-sorba kell fejteni, $x_0 = 0$.

a) Határozzuk meg a függvény deriváltjainak értékét az $x_0 = 0$ pontban:

$$\begin{array}{rclcrclcl} & & & & f(0) &=& e^0 &=& 1; \\ f'(x) &=& e^x, & & f'(0) &=& e^0 &=& 1; \\ f''(x) &=& e^x, & & f''(0) &=& e^0 &=& 1; \\ & \vdots & & & & \vdots & & & \\ f^{(n)}(x) &=& e^x, & & f^{(n)}(0) &=& e^0 &=& 1. \end{array}$$

Innen a függvény Maclaurin-sora felírható a következő alakban:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(x),$$

vagyis rövidebben: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

◇

b) A függvény deriváltjainak értéke az $x_0 = 0$ pontban:

$$\begin{array}{rclrrcrcr}
 & & & f(0) & = & \sin 0 & = & 0; \\
f'(x) & = & \cos x, & f'(0) & = & \cos 0 & = & 1; \\
f''(x) & = & -\sin x, & f''(0) & = & -\sin 0 & = & 0; \\
f'''(x) & = & -\cos x, & f'''(0) & = & -\cos 0 & = & -1; \\
f^{IV}(x) & = & \sin x, & f^{IV}(0) & = & \sin 0 & = & 0; \\
f^{V}(x) & = & \cos x, & f^{V}(0) & = & \cos 0 & = & 1; \\
f^{VI}(x) & = & -\sin x, & f^{VI}(0) & = & -\sin 0 & = & 0;
\end{array}$$

Felhasználva a kapott értékeket, felírhatjuk a hatodfokú Maclaurin-polinomot:

$$M_6(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6.$$

Innen következik a függvény Maclaurin-sora:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

◇

c) A függvény deriváltjainak értéke az $x_0 = 0$ pontban:

$$\begin{array}{rclrrcrcr}
 & & & f(0) & = & \cos 0 & = & 1; \\
f'(x) & = & -\sin x, & f'(0) & = & -\sin 0 & = & 0; \\
f''(x) & = & -\cos x, & f''(0) & = & -\cos 0 & = & -1; \\
f'''(x) & = & \sin x, & f'''(0) & = & \sin 0 & = & 0; \\
f^{IV}(x) & = & \cos x, & f^{IV}(0) & = & \cos 0 & = & 1; \\
f^{V}(x) & = & -\sin x, & f^{V}(0) & = & -\sin 0 & = & 0; \\
f^{VI}(x) & = & -\cos x, & f^{VI}(0) & = & -\cos 0 & = & -1;
\end{array}$$

A függvény hatodfokú Maclaurin-polinomaja a következő:

$$M_6(x) = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6.$$

Innen felírhatjuk a függvény Maclaurin-sorát:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

◇

d) A függvény deriváltjainak értéke az $x_0 = 0$ pontban:

$$\begin{array}{rclrclrclrcl}
 & & & f(0) & = & \ln(1+0) & = & 0; & & \\
f'(x) & = & \frac{1}{1+x}, & f'(0) & = & \frac{1}{1+0} & = & 1 & = & 1!; \\
f''(x) & = & \frac{-1}{(1+x)^2}, & f''(0) & = & \frac{-1}{(1+1)^2} & = & -1 & = & -1!; \\
f'''(x) & = & \frac{2}{(1+x)^3}, & f'''(0) & = & \frac{2}{(1+0)^3} & = & 2 & = & 2!; \\
f^{IV}(x) & = & \frac{-6}{(1+x)^4}, & f^{IV}(0) & = & \frac{-6}{(1+0)^4} & = & -6 & = & -3!; \\
f^{V}(x) & = & \frac{24}{(1+x)^5}, & f^{V}(0) & = & \frac{24}{(1+0)^5} & = & 24 & = & 4!;
\end{array}$$

A függvény ötödfokú Maclaurin-polinomja:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5 \\
&= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5.
\end{aligned}$$

Innen felírhatjuk a függvény Maclaurin-sorát is:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

◇

34. Feladat. Írja fel az adott függvények harmadfokú Taylor-polinomját az x_0 pont körül:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$ az $x_0 = 2$ körül;

b) $f(x) = xe^{-2x}$ az $x_0 = -1$ körül.

Megoldás. Számítsuk ki az adott függvények deriváltjait bezárólag a harmadrendű deriválttal.

a) Helyettesítsük be az $x_0 = 2$ pontot a kapott deriváltakba:

$$\begin{array}{rclclrclcl}
 & & & & & f(2) & = & \frac{2x-3}{(2-1)^2} & = & 1; \\
f'(x) & = & \frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-3)}{(x-1)^4} & = & \frac{-2x+4}{(x-1)^3} & f'(2) & = & \frac{-2\cdot 2+4}{(2-1)^3} & = & 0; \\
f''(x) & = & \frac{-2(x-1)^3-3(x-1)^2(-2x+4)}{(x-1)^6} & = & \frac{4x-10}{(x-1)^4} & f''(2) & = & \frac{4\cdot 2-10}{(2-1)^4} & = & -2; \\
f'''(x) & = & \frac{4(x-1)^4-4(x-1)^3(4x-10)}{(x-1)^8} & = & \frac{-12x+36}{(x-1)^5} & f'''(2) & = & \frac{-12\cdot 2+36}{(2-1)^5} & = & 12;
\end{array}$$

Innen a következő alakú Taylor-polinomot kapjuk:

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 0(x-2) - \frac{2}{2!}(x-2)^2 + \frac{12}{3!}(x-2)^3 = 1 - (x-2)^2 + 2(x-2)^3.$$

◇

b) Helyettesítsük a $x_0 = -1$ pontot a függvény deriváltjaiba:

$$\begin{array}{rclcrrcr}
 & & & & & f(-1) & = & -e^2; \\
f'(x) & = & e^{-2x} - 2xe^{-2x} & = & e^{-2x}(1-2x) & f'(-1) & = & 3e^2; \\
f''(x) & = & -2e^{-2x}(1-2x) - 2e^{-2x} & = & -4e^{-2x}(1-x) & f''(-1) & = & -8e^2; \\
f'''(x) & = & 8e^{-2x}(1-x) - e^{-2x}\cdot(-4) & = & 4e^{-2x}(3-2x) & f'''(-1) & = & 20e^2;
\end{array}$$

Innen a harmadfokú Taylor-polinom:

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= -e^2 + 3e^2(x+1) - \frac{8}{2!}e^2(x+1)^2 + \frac{20}{3!}e^2(x+1)^3 = \\
&= -e^2 + 3e^2(x+1) - 4e^2(x+1)^2 + \frac{10}{3}e^2(x+1)^3.
\end{aligned}$$

◇

35. Feladat. Fejtsük Maclaurin-sorba a következő függvényeket felhasználva a már ismert Maclaurin-sorokat.

a) $f(x) = \text{sh}x$;

b) $f(x) = e^{-x^3}$.

Megoldás. Mindkét feladatot az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sor segítségével oldjuk meg.

a) Az adott függvényt a definíció szerint fel lehet írni a $\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ alakban. Az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\text{sh}x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} - (-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},
\end{aligned}$$

mivel ha $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\text{sh}x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = 0.$$

◇

b) Az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát kihasználva a következőt kapjuk:

$$e^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-x^3}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}.$$

◇

36. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az adott intervallumon a megadott periodikus függvényeket, melyeknek alapperiódusa 2π. Számítsa ki a komplex alakú Fourier sor c_n együtthatóját.

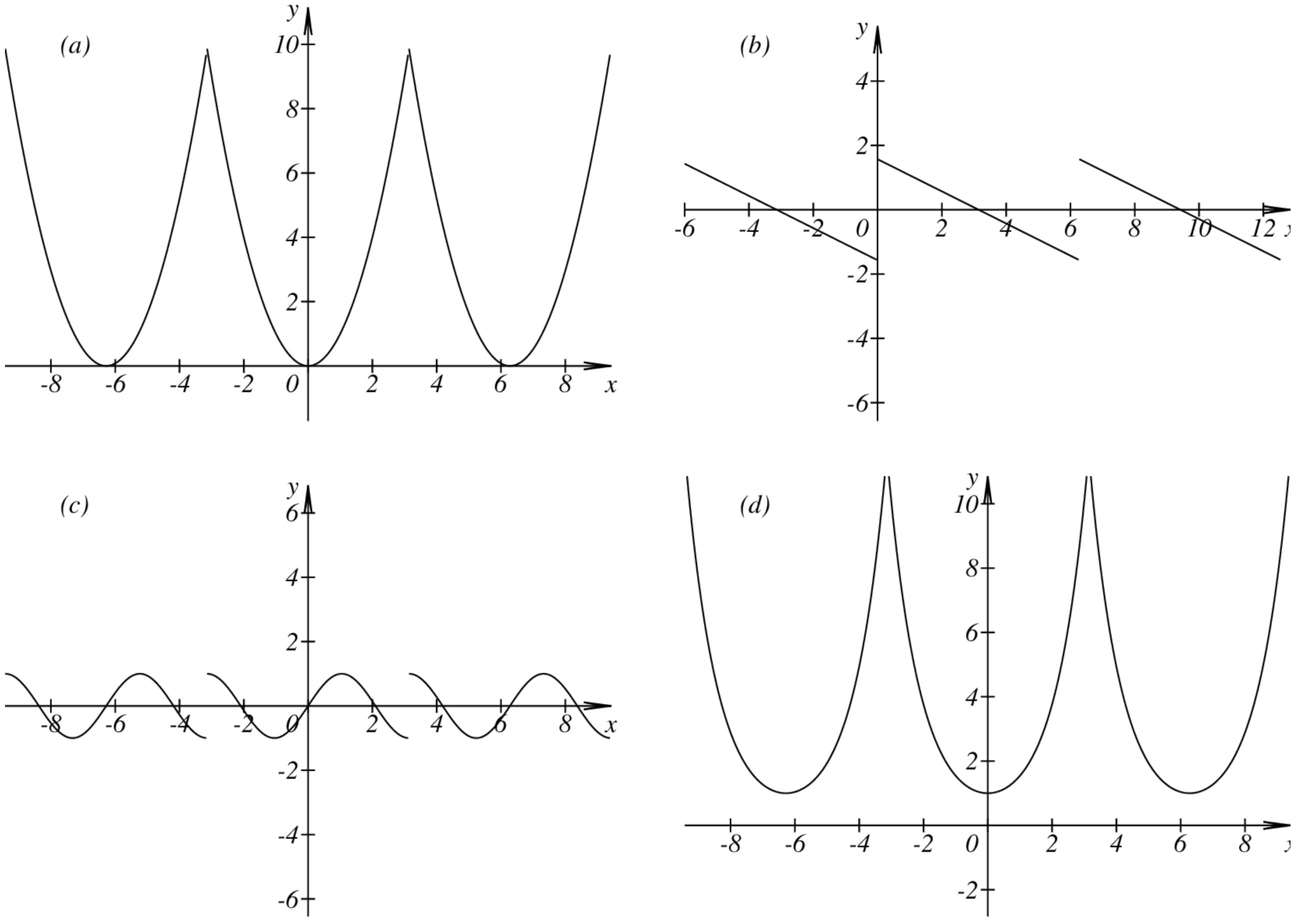
a) $f(t) = t^2, t \in [-\pi, \pi)$;

b) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in [0, 2\pi)$;

c) $f(\omega) = \sin a\omega,\ a \notin \mathbb{Z}, \omega \in [-\pi, \pi)$;

d) $f(z) = \text{ch} z, z \in [-\pi, \pi)$.

Megoldás. Az adott függvények grafikonjai a 2.3 ábrán láthatók.



2.3. ábra: Az adott függvények grafikonjai

a) Az $f(t) = t^2$ függvény páros, így $b_n = 0$. Számítsuk ki az a_0 és $a_n,\ n = 1, 2, \ldots$ együtthatókat!

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}. \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} u = t^2 & \mathrm{d}v = \cos nt\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t & v = \frac{1}{n}\sin nt \end{array}\right| = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{n}\sin nt\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t\right] = -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t = \\
&= \left|\begin{array}{ll} u = t & \mathrm{d}v = \sin nt\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & v = -\frac{1}{n}\cos nt \end{array}\right| = -\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t\right] = \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}
$$

A függvény Fourier sora felírható a következő alakban:

$$t^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt.$$

A komplex alakú Fourier sor együtthatói $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{3}$, $b_n = 0$ mivel az adott függvény páros, és innen

$$c_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2}.$$

◇

b) Ha a függvény grafikonját tekintjük, észrevehetjük, hogy a függvény páratlan az adott intervallumon, annak ellenére, hogy $f(-x) \neq \pm f x)$. Innen az következik, hogy $a_0 = a_n = 0$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = \\
&= \begin{vmatrix} u = \frac{\pi-x}{2} & dv = \sin nx \, dx \\ du = -\frac{1}{2}\, dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi - x}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Az adott függvény Fourier sora:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

A komplex alakú Fourier sor együtthatói: $c_0 = a_0 = 0$, és mivel $a_n = 0$, ezért $c_n = -\frac{i}{2} b_n = -\frac{i}{2n}$ i $c_{-n} = \frac{i}{2} b_n = \frac{i}{2n}$.

◇

c) Az $f(x) = \sin a\omega$ függvény grafikonja a paraméter $a = \frac{3}{2}$ értékére van ábrázolva. Ez a függvény páratlan, ezért $a_0 = a_n = 0$. A b_n együttható kiszámításához meg kell oldanunk a következő integrált:

$$\begin{aligned}
I &= \int \sin a\omega \sin n\omega \, d\omega = \begin{vmatrix} u = \sin a\omega & dv = \sin n\omega \, d\omega \\ du = a\cos a\omega \, d\omega & v = -\frac{1}{n}\cos n\omega \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{1}{n}\sin a\omega \cos n\omega + \frac{a}{n}\int \cos a\omega \cos n\omega \, d\omega = \\
&= \begin{vmatrix} u = \cos a\omega & dv = \cos n\omega \, d\omega \\ du = -a\sin a\omega \, d\omega & v = \frac{1}{n}\sin n\omega \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{1}{n}\sin a\omega \cos n\omega + \frac{a}{n}\left(\frac{1}{n}\cos a\omega \sin n\omega + \frac{a}{n} I\right)
\end{aligned}$$

A kapott egyenlőségből kifejezhetjük az I-t:

$$I = \frac{-n \sin a\omega \cos n\omega + a \cos a\omega \sin n\omega}{n^2 - a^2}.$$

A b_n együttható most már könnyen kiszámítható:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\sin n\omega \,\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin a\omega \sin n\omega\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} I\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{-n\sin a\pi(-1)^n}{n^2-a^2} = \frac{2}{\pi}\frac{n\sin a\pi(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}. \end{aligned}$$

A függvény Fourier sorát felírhatjuk a következő alakban:

$$\sin a\omega = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2}\sin n\omega.$$

A komplex alakú Fourier sor együtthatói: $c_0 = a_0 = 0$. Mivel $a_n = 0$, ezért

$$c_n = -\frac{i}{2}b_n = -\frac{1}{\pi}\frac{n\sin a\pi(-1)^{n+1}}{n^2-a^2} i \quad \text{és} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{\pi}\frac{n\sin a\pi(-1)^{n+1}}{n^2-a^2} i.$$

◇

d) A $\mathrm{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ függvény páros. Ezért $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{ch} z\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\pi}\mathrm{sh}(z)\Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}.$$

Az a_n együttható kiszámításához meg kell oldani a következő integrált:

$$\begin{aligned} I &= \int \mathrm{ch} z\cos nz\,\mathrm{d}z = \begin{vmatrix} u = \mathrm{ch} z & \mathrm{d}v = \cos nz\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}u = \mathrm{sh} z\,\mathrm{d}z & v = \frac{1}{n}\sin nz \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{ch} z\sin nz - \frac{1}{n}\int \mathrm{sh} z\sin nz\,\mathrm{d}z = \\ &= \begin{vmatrix} u = \mathrm{sh} az & \mathrm{d}v = \sin nz\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}u = \mathrm{ch} z\,\mathrm{d}z & v = -\frac{1}{n}\cos nz \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{ch} z\sin nz - \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\mathrm{sh} z\cos nz + \frac{1}{n}I\right). \end{aligned}$$

Miután kifejeztük az I-t a kapott egyenlőségből, a következőt kapjuk:

$$I = \frac{n\mathrm{ch} z\sin nz + \mathrm{sh} z\cos nz}{n^2-1}.$$

Az a_n együtthatót kiszámíthatjuk az előző integrál segítségével:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\cos nz\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{ch} z\cos nz\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{2}{\pi}I\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2(n^2-1)} = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(n^2-1)}. \end{aligned}$$

A függvényt Fourier sorba fejthetjük a következő módon:

$$\mathrm{ch} z = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \cos nz.$$

A komplex alakú Fourier sor együtthatói: $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$ és $c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2} = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(n^2-1)}$.

◇

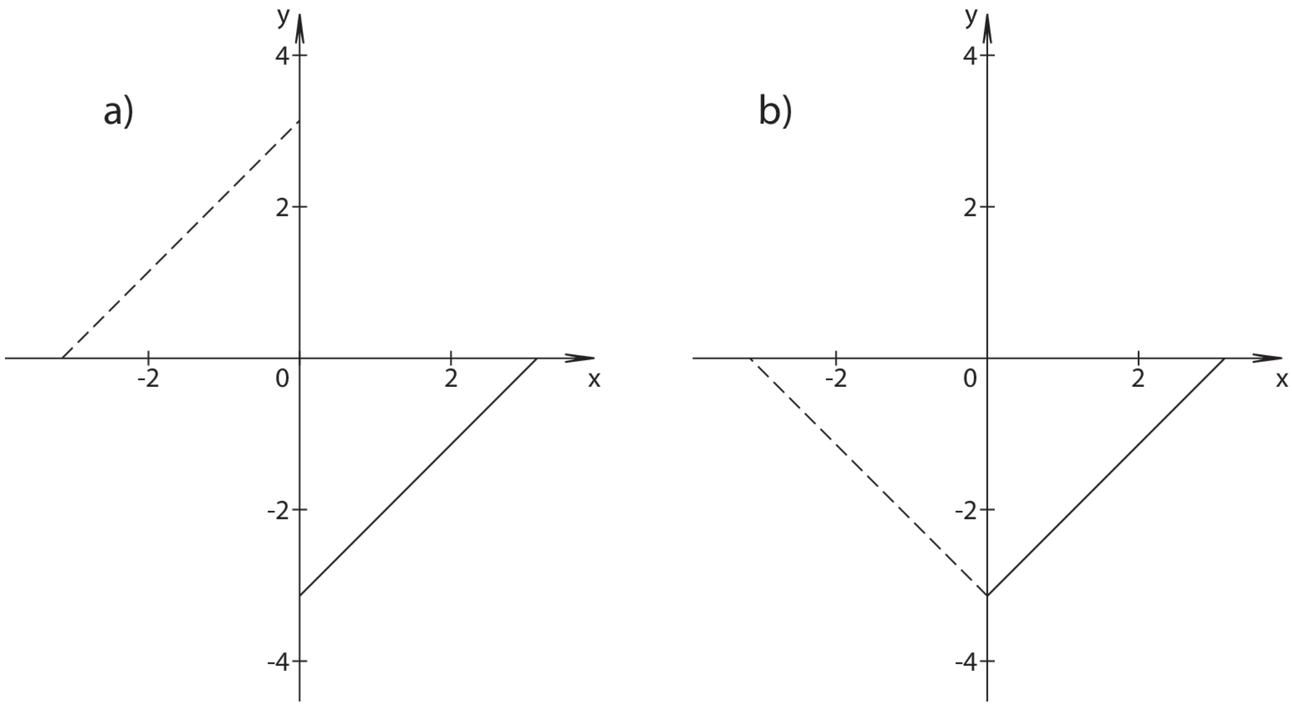
37. Feladat. Bővítse ki az $f(x) = x - \pi,\ x \in (0, \pi]$, $f(x) = f(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ függvényt a $[-\pi, 0)$ intervallumra és fejtse Fourier sorba

a) csak szinuszos tagok segítségével;

b) csak koszinuszos tagok segítségével.

Rajzolja le a kibővített függvényeket!

Megoldás. Bővítsük ki az adott függvényt páratlan függvényre, hogy csak szinuszos tagokkal ábrázolhassuk a megfelelő Fourier sort. Utána pedig bővítsük ki a függvényt páros függvényre, hogy csak koszinuszos tagokból álljon a megfelelő Fourier sor.



2.4. ábra: A bővített függvény grafikonjai

a) Mivel a függvény páratlan, $a_0 = a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x - \pi & \mathrm{d}v = \sin nx\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x-\pi}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x \right] = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} \right] = -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

A Fourier sort szinuszos tagok segítségével a következő alakban írhatjuk fel:

$$x - \pi = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} \sin nx = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

◇

b) Mivel a függvény páros, $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} - \pi x \right] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^2 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{2} \right) = -\pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) \cos nx\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x - \pi & \mathrm{d}v = \cos nx\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x - \pi}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx\, \mathrm{d}x \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

A megfelelő Fourier sort felírhatjuk koszinuszos tagok segítségével a következő alakban:

$$x - \pi = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2 \pi} \cos (2k+1)x = -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

◇

38. Feladat. Fejtse a $(0, \pi)$ intervallumon koszinuszos tagokból álló Fourier sorba a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}.$$

Megoldás. Az előző tétel szerint a függvényt a $(-\pi, 0)$ intervallumon kell meghosszabbítani. Mivel a feladat szerint koszinuszos tagokból álló Fourier sorba kell fejteni az adott függvényt, ezért úgy kell meghosszabbítani, hogy az párossá váljon. Ebben az esetben $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x$. Mivel a függvénynek két ága van, a függvény integrálját a $[0, \pi]$ határokban fel kell bontani két integrál összegére. Az első integrál integrandusa a függvény felső ága, határa pedig $[0, \frac{\pi}{2}]$, még a második integrál integrandusa a függvény alsó ága, határa pedig $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\, \mathrm{d}x \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Hasonló módon:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}
\end{aligned}$$

A Fourier sor felírható a következő alakban:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx.$$

◇

39. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = f(x+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$ periodikus függvényeket a kijelölt intervallumon:

a) $f(x) = |x|$, $x\in[-\pi,\pi)$;

b) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & x\in[-\pi,0) \\ \pi, & x\in[0,\pi) \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}) \\ x-2\pi, & x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi) \end{cases}$.

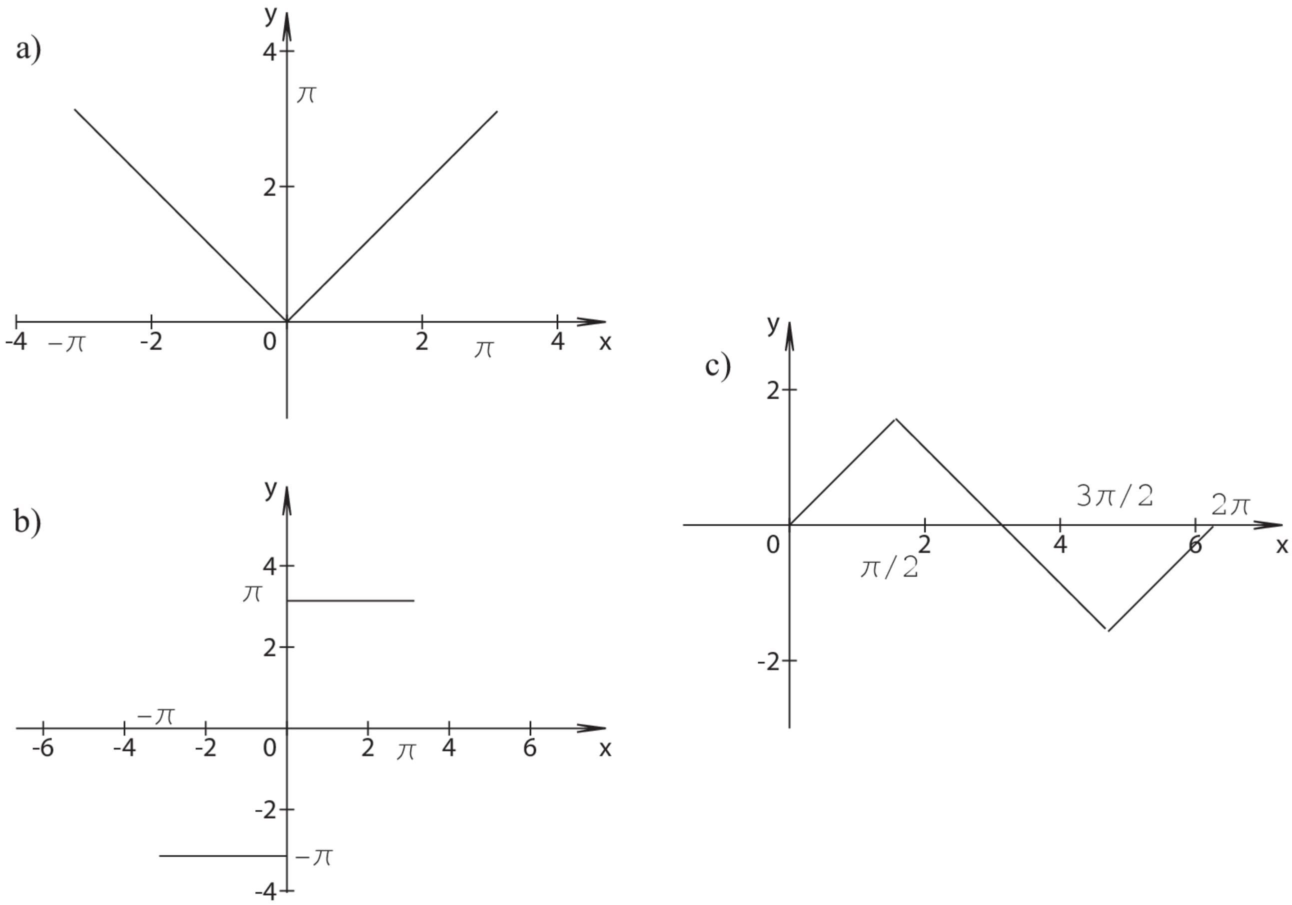
Megoldás. A függvények grafikonjai a 2.5 ábrán láthatók.

a) Az $f(x) = |x|$ függvény páros, így $b_n = 0.$ Az a_0 és a_n együtthatókat az abszolút érték definíciója segítségével számítjuk ki: $|x| = \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$. A függvény párosságának köszönhetően elég a függvény felső ágát figyelembe venni.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi. \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,\mathrm{d}x = \\
&= \begin{vmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \cos nx\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & n = 2k+1,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

A függvény Fourier sora:

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$



2.5. ábra: Adott függvények grafikonjai

◇

b) A grafikonról látható, hogy a függvény páratlan, vagyis $a_0 = a_n = 0$. A b_n együtthatóra érvényes a következő számítás:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sin}\,nx\,\text{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\,\text{sin}\,nx\,\text{d}x + \int_{0}^{\pi} \pi\,\text{sin}\,nx\,\text{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\int_{-\pi}^{0}\text{sin}\,nx\,\text{d}x + \pi\int_{0}^{\pi}\text{sin}\,nx\,\text{d}x\right] = \left.\frac{\text{cos}\,nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{\text{cos}\,nx}{n}\right|_{0}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{n}\left((1-(-1)^n) - ((-1)^n - 1)\right) = \frac{1}{n}(2 - 2\cdot(-1)^n) = \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4}{n}, & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

A függvény Fourier sora:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k+1}\,\text{sin}\,(2k+1)x = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sin}\,(2k+1)x}{2k+1}.$$

◇

c) A grafikonról látható, hogy a függvény páratlan az adott intervallumon. Így elég kiszámítani a b_n együtthatót. Az együttható kiszámításához szükséges képletben levő integrált két megfelelő integrandussal és határral rendelkező integrál összegére bontjuk. Ezen kívül a $\sin\frac{3n\pi}{2} = -\sin\frac{n\pi}{2},\ n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ és $\sin\frac{3n\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2} = 0,\ n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ identitást is alkalmazzuk.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{3\pi/2}^{2\pi}(x-2\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x - \frac{\pi - x}{n}\cos nx\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \\
&- \frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x - \frac{x-2\pi}{n}\cos nx\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\Big] = \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2n}\cos\frac{3n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \\
&- \frac{\pi}{2n}\cos\frac{3n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\cos\frac{3n\pi}{2} + \\
&+ \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{3n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{pi}{2n}\cos\frac{3n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\Big] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right] = \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Innen a függvény Fourier sora:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)x.$$

◇

40. Feladat. Határozza meg az adott sorok összegét a megfelelő függvény Fourier sorának segítségével.

a) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ sor összegét az $f(x) = x$ Fourier sorával;

b) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ sor összegét az $f(x) = |x|$ Fourier sorával.

Megoldás. a) Az adott függvényt a *12. példában* Fourier sorba fejtettük:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

Ha a fenti Fourier sorba behelyettesítjük az $x = \frac{\pi}{2}$-et, akkor a következő számsort kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}.\end{aligned}$$

Ha $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}$, akkor $\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{n+1}$. Behelyettesítve a kapott eredményt, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-2}}{2k-1}(-1)^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.\end{aligned}$$

A számsor összege $\frac{\pi}{4}$.

◇

b) A feladatban említett függvény Fourier sorát a *12. a) feladatban* meghatároztuk:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

Ha behelyettesítjük az $x = 0$-t, akkor a

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \\ -\frac{\pi}{2} &= -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \\ \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\end{aligned}$$

számsort kapjuk. Innen az adott numerikus sor összege $\frac{\pi^2}{8}$.

◇

2.3.1 Gyakorló feladatok

41. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

42. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n-1}$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

43. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

44. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n-1}\right)^n (x-1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

45. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n x^n$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

46. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n}\right)^n (x-3)^n$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

47. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n (x-3)^n$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

48. Feladat. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-n}{5n}\right)^n (x-1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát, majd vizsgálja ki a konvergenciát a konvergenciatartomány széleiben.

49. Feladat. Az $f(x) = e^{x/2}$ függvénynek írja fel a harmadfokú Maclaurin-polinomját.

50. Feladat. Az $f(x) = e^{-3x}$ függvényt fejtse Maclaurin-sorba.

51. Feladat. Az $f(x) = e^{-2x}$ függvényt fejtse Maclaurin-sorba.

52. Feladat. Az $f(x) = \frac{1}{1+x}$ függvénynek írja fel a harmadfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 2$ pont körül.

53. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = 2x$, $f(x) = f(x+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon.

54. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = \frac{1}{2}x$, $f(x) = f(x+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon.

55. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = \pi x$, $f(x) = f(x+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon.

56. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = x-\pi$, $f(x) = f(x+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon.

57. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = \frac{1}{2}|x|$, $f(x) = f(x+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon.

58. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = 2|x|$, $f(x) = f(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon.

59. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = f(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, ha: $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1, & x \in [0, \pi) \end{cases}$.

60. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = f(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, ha: $f(x) = \begin{cases} -x - \pi, & x \in [-\pi, 0) \\ x - \pi, & x \in [0, \pi) \end{cases}$.

61. Feladat. Rajzolja le, majd fejtse Fourier sorba az $f(x) = f(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ periodikus függvényt a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, ha: $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & x \in [-\pi, 0) \\ -x + \pi, & x \in [0, \pi) \end{cases}$.

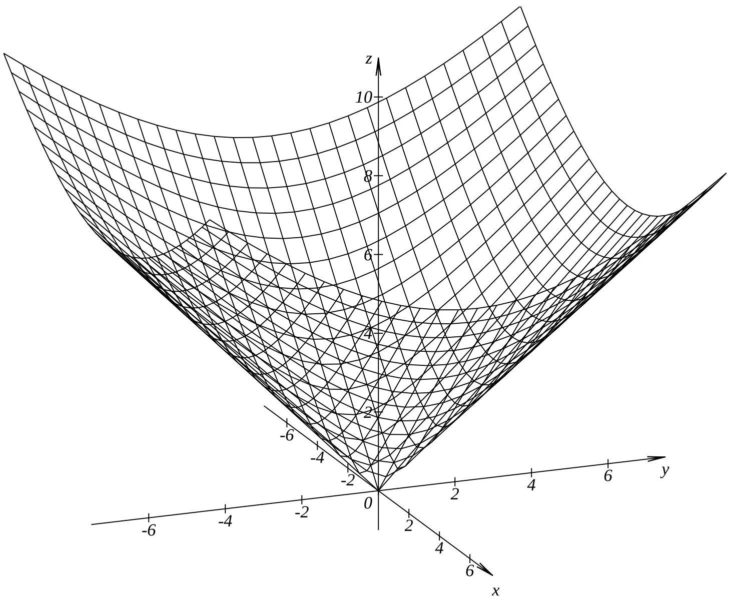
3. fejezet

Kétváltozós függvények

A természetben lejátszódó folyamatok kimenetele ritkán függ csak egy mennyiségtől. Legtöbbször több mennyiségtől függ, vagyis modellezésükhöz többváltozós függvény szükséges. Vizsgálatainkat a továbbiakban kizárólag a kétváltozós függvényekre terjesztjük ki. Lássunk egy pár példát ezekre a függvényekre:

- A henger V térfogata az alap r sugarától és a henger H magasságától függ. A henger térfogatának függvénye felírható az $V = \pi r^2 H$ alakban.
- A gáz P nyomása többek között a V térfogattól és a T hőmérséklettől függ, vagyis $P = f(V, T)$.

A kétváltozós függvényeket a $z = f(x, y)$ képlettel jelöljük, ahol x, y független változók és a z függő változó. A függő változót egyértelműen meghatározzák a független változók és az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképzés. A kétváltozós függvény grafikonját bonyolultabb rajzolni, mint az egyváltozós függvényt, mivel itt nem görbét, hanem felületet kell rajzolni térbeli koordináta-rendszerben. A 3.1 ábrán a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelület látha-



3.1. ábra: Kúpfelületlet

tó. A kúpfelület a forgástestek közé tartozik. A forgástest egy görbe forgatásával keletkezik valamely tengely körül. A forgástestek mellett a hengerfelületek is elterjedtek, amelyek egy egyenes forgatásával keletkeznek valamely tengely körül.

A kétváltozós függvények kivizsgálásánál a függvény ugyanazon tulajdonságait vizsgáljuk, mint az egyváltozós függvényeknél. Ezen tulajdonságok kivizsgálása bonyolultabb, mivel a függvénynek két független változója van. A kétváltozós függvények kivizsgálásánál fontos szerepet játszik az értelmezési tartomány, határérték meghatározása, folytonosság és a függvény differenciálhatósága. A továbbiakban az értelmezési tartománnyal és a differenciálhányadossal foglalkozunk.

3.1 Értelmezési tartomány

12. Definíció. A $z = f(x,y)$ függvény értelmezési tartománya az xOy sík (x,y) pontjainak olyan D_f halmaza, melyre a függvény értelmezett, vagyis a függvény értéke ezekben a pontokban valós szám. Az $(x,y) \in D_f$ pontokhoz tartozó függvényértékek halmazát a függvény értékkészletének nevezzük. Jelölése: CD_f.

16. Példa. Vizsgálja ki a következő függvények értelmezési tartományát.

a) $z = x^2 + y^2$;

b) $z = \sqrt{x+y}$;

c) $z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

d) $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

Megoldás. A kétváltozós függvények értelmezési tartományát hasonló módon határozzuk meg, mint az egyváltozós függvényekét.

a) Ez a függvény minden $x, y \in \mathbb{R}$ valós számra, vagyis az egész xOy síkon értelmezett.

□

b) A függvény akkor értelmezett, ha $x+y \geq 0$, vagyis az $y \geq -x$ félsíkon, melynek a határa az $y = -x$ egyenes.

□

c) A függvény értelmezett, ha $4 - x^2 - y^2 > 0$, vagyis $x^2 + y^2 < 4$. Ez annak a körnek a belső tartománya, melynek középpontja a koordináta-rendszer középpontja, sugara pedig 2.

□

d) A függvény akkor értelmezett, ha érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x}{2} &\leq 1 \\ xy &\geq 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlőtlenségből következik, hogy $x \in [-2, 2]$. A második egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x \in [-2, 0),\ y \leq 0$ vagy ha $x \in [0, 2],\ y \geq 0$.

□

3.2 A kétváltozós függvény differenciálhányadosa

A differenciálszámítás alapötlete a függvény növekményének approximálása lineáris függvénnyel, mely a független változó növekményétől függ. Az említett lineáris függvény értékét egy adott (x_0, y_0) pontban a függvény deriváltjának nevezzük az (x_0, y_0) pontban.

13. Definíció. Legyen a $z = f(x, y)$ függvény értelmezve a $X \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazon. Akkor:

- az f függvény x szerinti parciális növekménye:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \tag{3.1}$$

- az f függvény y szerinti parciális növekménye:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y); \tag{3.2}$$

- az f függvény teljes (totál) növekménye pedig:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{3.3}$$

A függvény differenciálhányadosát (deriváltját) a függvény növekménye segítségével definiáljuk. Mivel a függvénynek két független változója van, külön keressük a függvény x illetve y szerinti deriváltját. Ezeket a deriváltakat a függvény parciális deriváltjainak nevezzük.

14. Definíció. Legyen a $z = f(x, y)$ függvény értelmezve az $X \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazon.

- A $z = f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltját (differenciálhányadosát) $\frac{\partial f}{\partial x}$-el vagy f'_x-el jelöljük és a következő egyenlőséggel definiáljuk:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{3.4}$$

- A $z = f(x, y)$ függvény y szerinti parciális deriváltját (differenciálhányadosát) $\frac{\partial f}{\partial y}$-al vagy f'_y-al jelöljük és a következő egyenlőséggel definiáljuk:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \tag{3.5}$$

A kétváltozós függvény parciális deriváltjait a gyakorlatban csakúgy, mint az egyváltozós függvény deriváltját, nem a definíció szerint határozzák meg, hanem az elemi függvények deriváltjainak táblázata és a függvények összegének, szorzatának és hányadosának, illetve az összetett függvény deriválási szabályának (láncszabály) segítségével. Mivel a függvénynek két független változója van, a helyzet egy kicsit bonyolultabb, mint az egyváltozós függvénynél. A parciális derivált valamely változó szerinti kiszámításánál a másik változót állandóként kezeljük.

10. Tétel. Legyen a $z = z(u, v)$ összetett függvény, ahol $u = u(x, y)$ és $v = v(x, y)$. Ha az $u = u(x, y)$ és $v = v(x, y)$ függvények mindkét változójuk szerint parciálisan differenciálhatók az (x, y) pontban és a $z = z(u, v)$ függvény differenciálható az $u = u(x, y), v = v(x, y)$ pontban, akkor a $z = z(u, v)$ összetett függvény mindkét változója szerint parciálisan differenciálható az (x, y) pontban és:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3.7}$$

Ezt a differenciálási szabályt láncszabálynak nevezzük.

17. Példa. Határozza meg a következő függvények parciális deriváltjait:

a) $f(x, y) = x^2 y$;   b) $f(x, y) = 4xy + \ln xy$;

Megoldás. Az első feladatban az adott függvény elemi függvény, még a második feladatban összetett függvényről van szó.

a) A függvény x változó szerinti parciális deriváltját úgy határozzuk meg, hogy az y-t állandónak tekintjük, még az y szerinti parciális derivált meghatározásánál az x-et tekintjük állandónak.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy; \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

$\square$

b) Az adott függvény első tagja elemi függvény, még a második tag összetett függvény. A láncszabály szerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4y + \frac{1}{xy} \cdot y = 4y + \frac{1}{x}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4x + \frac{1}{xy} \cdot x = 4x + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

$\square$

15. Definíció. A $z = f(x, y)$ függvény teljes differenciálját a következő egyenlettel lehet felírni:

$$\mathrm{d}f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{3.8}$$

18. Példa. Határozza meg az $f(x, y) = 2xy - 2x - 3y + 1$ függvény teljes differenciálját.

Megoldás. A teljes differenciál meghatározásához számítsuk ki a függvény parciális deriváltjait!

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y - 2; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x - 3. \end{aligned}$$

A teljes differenciált felírhatjuk a parciális deriváltak segítségével:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = (2y-2)\mathrm{d}x + (2x-3)\mathrm{d}y.$$

□

Hasonlóképpen, mint az egyváltozós függvényeknél, a kétváltozós függvényeknél is léteznek magasabb rendű deriváltak.

16. Definíció. A $z = f(x, y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjait a következő módon definiáljuk:

- az x szerinti másodrendű parciális derivált:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \tag{3.9}$$

- az y szerinti másodrendű parciális derivált:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \tag{3.10}$$

- a vegyes másodrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ és } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{3.11}$$

Általános esetben a vegyes parciális deriváltak értéke az (x_0, y_0) pontban nem egyenlő, vagyis $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. Bizonyos feltételek teljesülésekor a vegyes parciális deriváltak egyenlőek.

11. Tétel (Clairaut tétel)**.** A. Clairaut (1713–1765)
Ha a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ vegyes parciális deriváltak léteznek az (x_0, y_0) pont környezetében és ha folytonosak abban a környezetben, akkor azok egyenlőek, vagyis $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

A másodrendű parciális deriváltak segítségével definiálható a másodrendű teljes differenciál.

17. Definíció. A $z = f(x, y)$ függvény másodrendű teljes differenciálja a következő képlettel adható meg:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f &\equiv \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\
\mathrm{d}^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2 \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

19. Példa. Határozza meg az $f(x,y)=x^2+y^2-1$ függvény elsőrendű és másodrendű teljes differenciálját.

Megoldás. Számítsuk ki az elsőrendű és másodrendű parciális deriváltakat!

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x;\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y;\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.\end{aligned}$$

Az elsőrendű differenciált felírhatjuk

$$\mathrm{d}f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$$

alakban, még a másodrendű differenciál a következő alakú:

$$\mathrm{d}^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2=2(\mathrm{d}x)^2+2(\mathrm{d}y)^2.$$

□

A parciális deriváltak fontos szerepet játszanak a kétváltozós függvények kivizsgálásában. Lehetővé teszik a függvény változásának becslését az argumentumok kis mértékű változásánál. A függvények szélső értékének meghatározásában is fontos szerepet játszanak.

3.2.1 A kétváltozós függvény Taylor- és Maclaurin-sora

A kétváltozós függvények is, mint az egyváltozós függvények Taylor-sorba fejthetők az (x_0,y_0) pont körül.

18. Definíció. Az (x_0,y_0) pont környezetében az elsőrendűtől az $(n+1)$-ed rendű folytonos parciális deriváltakkal rendelkező $z=f(x,y)$ függvény n-ed fokú Taylor-polinomja ebben környezetben felírható, mint:

$$\begin{aligned}T_n(x,y) &= f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right]+ \qquad (3.13)\\ &+ \frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big]+\frac{1}{3!}\Big[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)(x-x_0)^3+\\ &+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)+\\ &+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\Big]+\cdots\\ \cdots &+ \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)\end{aligned}$$

Az $f(x,y)$ függvény az (x_0,y_0) pont környezetében approximálható a Taylor-polinommal, mivel $f(x,y)=$

$T_n(x,y) + R_{n+1}(x,y)$, ahol az $R_{n+1}(x,y)$ a függvény n-edfokú Taylor-polinommal való approximációjának hibáját jelöli. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x,y)$ határérték, akkor a

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0) \tag{3.14}$$

hatványsort az $f(x,y)$ függvény Taylor-sorának nevezzük az (x_0,y_0) pont környezetében. A Maclaurin-polinom illetve sor nem más, mint a Taylor-polinom illetve sor az $(x_0,y_0) = (0,0)$ pont körül:

$$\begin{aligned}
M_n(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right] + \\
&+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy + \right.\\
&+ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right] + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)x^3 + \right.\\
&+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)x^2y + \\
&+ \left. 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)y^3\right] + \cdots \\
\cdots &+ \frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(0,0).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(0,0). \tag{3.16}$$

20. Példa. Írja fel az $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ függvény másodfokú Taylor-polinomját az $(x_0,y_0) = (-2,1)$ pont körül.

Megoldás. Mivel másodfokú polinomot keresünk, ki kell számítanunk a másodrendű parciális deriváltakkal bezárólag a függvény összes parciális deriváltjának értékét a $(-2,1)$ pontban.

$$\begin{array}{rcl} & & \\ \frac{\partial f}{\partial x} &=& -2x+2y-6 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &=& 2x+6y-2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &=& -2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &=& 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &=& 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} f(-2,1) &=& 1; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) &=& 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) &=& 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,1) &=& -2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,1) &=& 2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,1) &=& 6. \end{array}$$

Innen a függvény másodfokú Taylor-polinomja a következő:

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= 1 + \frac{1}{1!}(0\cdot(x+2) + 0\cdot(y-1)) + \\
&+ \frac{1}{2!}(-2(x+2)^2 + 2\cdot 2\cdot(x+2)(y-1) + 6(y-1)^2) = \\
&= 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2
\end{aligned}$$

□

21. Példa. Határozza meg az $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját.

Megoldás. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakkal bezárólag a függvény összes parciális deriváltját. Mivel a függvény összetett, a láncszabályt alkalmazzuk: $u(x,y) = 1+x+y$ és $v(x,y) = 0$. Szintén kiszámíthatjuk, hogy $f(0,0) = 0$.

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x+y}(1+x+y)'_x = \frac{1}{1+x+y} = (1+x+y)^{-1} & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1; \\
\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+x+y}(1+x+y)'_y = \frac{1}{1+x+y} = (1+x+y)^{-1} & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}(1+x+y)'_x = \frac{-1}{(1+x+y)^2} = -(1+x+y)^{-2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}(1+x+y)'_y = \frac{-1}{(1+x+y)^2} = -(1+x+y)^{-2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}(1+x+y)'_y = \frac{-1}{(1+x+y)^2} = -(1+x+y)^{-2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1.
\end{array}$$

A másodfokú Maclaurin-polinomot felírhatjuk a következő alakban:

$$\begin{aligned}
M_2(x,y) &= 0 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(-x^2 + 2\cdot(-1)\cdot xy - y^2) = \\
&= x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

□

3.2.2 A kétváltozós függvények szélső értékei

19. Definíció. A $z = f(x,y)$ függvénynek az (x_0,y_0) pontban *lokális maximuma (szigorú lokális maximuma)* van ha az (x_0,y_0) pont $\mathcal{L}$ környezetében $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ ($f(x,y) < f(x_0,y_0)$) minden $(x,y) \in \mathcal{L}$ pontra.

A függvény minimumát hasonló módon definiáljuk:

20. Definíció. A $z = f(x,y)$ függvénynek az (x_0,y_0) pontban *lokális minimuma (szigorú lokális minimuma)* van ha az (x_0,y_0) pont $\mathcal{L}$ környezetében $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ ($f(x,y) > f(x_0,y_0)$) minden $(x,y) \in \mathcal{L}$ pontra.

Ezek a definíciók definiálják a függvény lokális szélső értékeit, viszont nem szólnak arról, hogyan kell őket megtalálni. Erre a kérdésre a következő tételek válaszolnak.

12. Tétel (A lokális szélső érték szükséges feltétele)**.** Ha a $z = f(x,y)$ függvénynek szélső értéke van az (x_0,y_0) pontban, amelyben differenciálható, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Azt az (x_0,y_0) pontot, amely kielégíti a fenti feltételt, *kritikus (stacionárius) pontnak* nevezzük.

Ez a tétel megadja a kritikus pontok meghatározásának módszerét. A kritikus pontok meghatározásához először meg kell határozni a függvény elsőrendű parciális deriváltjait, majd ki kell őket egyenlíteni nullával. Az így kapott egyenletrendszer két egyenletből és két ismeretlenből áll. A megoldásai lesznek a függvény kritikus pontjai.

Ez a tétel nem ad választ arra a kérdésre, hogy vajon a meghatározott kritikus pont a függvény lokális minimuma, maximuma vagy pedig nem is szélső érték (akkor az (x_0, y_0) pont a függvény nyeregpontja). Erre a kérdésre a következő tétel ad választ:

13. Tétel (A lokális szélső érték elégséges feltétele)**.** Ha a $z = f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) kritikus pont (az (x_0, y_0) pontban az elsőrendű parciális deriváltak egyenlőek nullával) környezetében másodrendű folytonos parciális deriváltjai vannak, és ha

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2, \tag{3.17}$$

akkor, ha:

- $D > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, a $z = f(x,y)$ függvénynek lokális minimuma van az (x_0, y_0) pontban;
- $D > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, a $z = f(x,y)$ függvénynek lokális maximuma van az (x_0, y_0) pontban;
- $D = 0$, akkor további vizsgálat szükséges, mivel ezzel a módszerrel nem dönthetjük el, hogy az (x_0, y_0) pont szélső érték-e vagy sem;
- $D < 0$, akkor az (x_0, y_0) pont nem szélső érték, hanem a $z = f(x,y)$ függvény nyeregpontja.

22. Példa. Határozza meg az $f(x,y) = 2x + 6y + \frac{18}{xy}$ függvény szélső értékeit.

Megoldás. Keressük meg a függvény kritikus pontjait úgy, hogy megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2 - \frac{18}{x^2 y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 6 - \frac{18}{xy^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{18}{x^2y}=2 & & x^2y=9 & & \frac{9}{y^3}=9 & & y=1 \\ \frac{18}{xy^2}=6 & \Rightarrow & xy^2=3 & \Rightarrow & x=\frac{3}{y^2} & \Rightarrow & x=3. \end{array}$$

A függvény kritikus pontja $(x_0, y_0) = (3, 1)$. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltak értékét a kritikus pontban.

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{36}{x^3 y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,1) = \frac{4}{3} > 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{18}{x^2 y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1) = 2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{36}{xy^3} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,1) = 12. \end{array}$$

Innen $D = \frac{4}{3} \cdot 12 - 2^2 = 12 > 0$. Mivel $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, az $(x_0, y_0) = (3, 1)$ kritikus pontban van a függvény lokális minimuma. A függvény minimuma $f_{min} \equiv f(3, 1) = 18.$

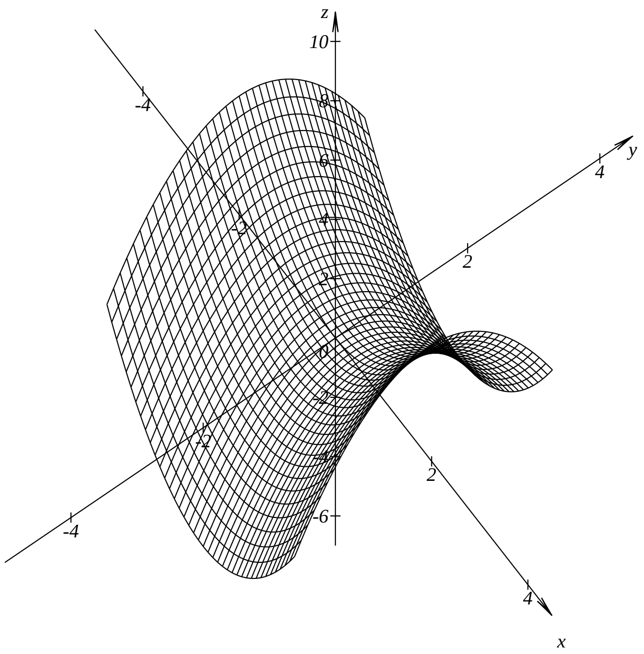
□

23. Példa. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény szélső értékeit.

Megoldás. Határozzuk meg először a függvény kritikus pontjait.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2x &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \equiv -2y &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $(x_0, y_0) = (0,0)$. A függvény másodrendű parciális deriváltjai $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$. Innen $D = -4 < 0$. Ez azt jelenti, hogy a függvénynek nincs szélső értéke. Az $(x_0, y_0) = (0,0)$ kritikus pont a függvény nyeregpontja. A függvény nyeregpontja az a pont ahol a függvény grafikonja nyereg alakot ölt, vagyis az egyik oldalon növekszik, még a másik oldalon csökken. Az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény grafikonja az 3.2 ábrán látható.



3.2. ábra: A $z = x^2 - y^2$ függvény grafikonja

□

3.2.3 Kétváltozós függvény feltételes szélső értékei

Eddig a kétváltozós függvény lokális szélső értékeit a függvény értelmezési tartományán kerestük. Ezeket a szélső értékeket feltétlen szélső értékeknek nevezzük. Elég gyakran találkozunk olyan optimizációs problémákkal is, amelyeknél a szélső értéket a függvény értelmezési tartományának valamely részhalmazán keressük. Az értelmezési tartomány ezen részhalmaza legtöbbször egyenletek vagy egyenlőtlenségek alakjában adott. Azokat a szélső értékeket, amelyek eleget tesznek ezeknek a feltételeknek, *feltételes szélső értékeknek* nevezzük.

Jelölje D a $z = f(x,y)$ függvény értelmezési tartományát és tegyük fel, hogy az $u(x,y) = 0$ implicit alakban adott görbe a D tartományon halad keresztül. A $z = f(x,y)$ függvény olyan szélső értékeit keressük, amelyek az $u(x,y) = 0$ görbén fekszenek. Ezt az optimizációs probémát felírhatjuk a következő alakban:

$$\begin{aligned} z = f(x,y) \quad &\to \quad \text{min (max)}, \\ u(x,y) \quad &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.18}$$

A $z = f(x,y)$ függvényt célfüggvénynek, még az $u(x,y) = 0$ implicit függvényt feltételnek, vagy megszorításnak nevezzük.

A feltételes optimizációs probléma egyik megoldási módszere a *Lagrange*(J.L. Lagrange (1736-1813)) módszer. Ez a módszer az ú.n. Lagrange-függvény feltétel nélküli szélső értékeit keresi, ahol:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda u(x,y). \tag{3.19}$$

A Lagrange-függvény szélső értékeit ugyanúgy határozzuk meg, mint a háromváltozós függvény feltétel nélküli szélső értékeit. A háromváltozós függvény kritikus pontjait a három ismeretlenből és három egyenletből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása az (x_0, y_0, λ_0) pont, még a $z = f(x,y)$ függvény az (x_0, y_0) pontban éri el a szélső értékét az $u(x,y) = 0$ feltétel mellett. A szélső érték típusának kérdését a Lagrange-függvény másodrendű teljes differenciálja előjelének segítségével vizsgáljuk ki. A kivizsgáláskor figyelembe kell venni azt is, hogy az $u(x,y) = 0$ feltétel teljes differenciálja egyenlő nullával, vagyis $\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$ illetve $\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y$. A Lagrange-függvény másodrendű teljes differenciálját felírhatjuk a következő alakban:

$$\mathrm{d}^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\mathrm{d}\lambda^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \lambda}\mathrm{d}y\mathrm{d}\lambda.$$

Behelyettesítve a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(u(x,y)) = 0; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \lambda} &= \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y; \end{aligned}$$

kifejezéseket a Lagrange-függvény másodrendű differenciáljába, a következőt kapjuk

$$\mathrm{d}^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + 0 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda - 2\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda,$$

vagyis

$$\mathrm{d}^2F(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\mathrm{d}y^2. \tag{3.20}$$

Ha

- $\mathrm{d}^2F(x_0,y_0) > 0$, az (x_0,y_0) kritikus pont a $z = f(x,y)$ függvény feltételes minimuma az $u(x,y) = 0$ feltétel mellett;
- $\mathrm{d}^2F(x_0,y_0) < 0$, az (x_0,y_0) kritikus pont a $z = f(x,y)$ függvény feltételes maximuma az $u(x,y) = 0$ feltétel mellett;
- $\mathrm{d}^2F(x_0,y_0) = 0$, akkor más módon kell kivizsgálnunk a feltételes szélső érték típusát, mivel ez a módszer nem ad választ erre a kérdésre.

24. Példa. Határozza meg a függvények feltételes szélső értékeit az adott feltételek mellett.

a) $f(x,y) = xy$ a $x + y = 1$ feltétel mellett;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ a $2x - y = 3$ feltétel mellett.

Megoldás. Ezeket a feladatokat a megfelelő Lagrange-függvény feltétel nélküli szélső értékeinek meghatározásával fogjuk megoldani.

a) Mivel $u(x,y) = x+y-1$, a Lagrange-függvény $F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x+y-1)$. A kritikus pontot az

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv y + \lambda &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv x + \lambda &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv x + y &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásával határozzuk meg. A megoldás az $(x_0,y_0,\lambda_0) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ pont. Határozzuk meg a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltjait és azoknak értékeit a kritikus pontban.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Innen $\mathrm{d}^2F = 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Mivel nem tudjuk a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ előjelét, nem tudjuk meghatározni a d^2F előjelét sem. Határozzuk meg a megszorítás teljes differenciálját, majd egyenlítsük ki nullával:

$$\mathrm{d}u \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0.$$

Innen d$y = -$dx, vagyis a Lagrange-függvény másodrendű teljes differenciálja d$^2F = 2\,$dxd$y = -2$d$x^2 < 0$. Az következik, hogy az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontban a $z = xy$ függvény eléri a maximumát az $x + y = 1$ feltétel mellett. A függvény feltételes maximuma $f_{max} \equiv f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

□

b) Az adott feltétel felírható implicit függvény alakjában: $u(x, y) = 2x - y - 3 = 0$. Innen a Lagrange-függvény $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(2x - y - 3)$. A Lagrange-függvény kritikus pontját a következő egyenletrendszer megoldásával határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x + 2\lambda &= 0 \Rightarrow 2x + 4y = 0 \Rightarrow x = -2y \\
\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2y - \lambda &= 0 \Rightarrow \lambda = 2y \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv 2x - y &= 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Innen a kritikus pont $(x_0, y_0, \lambda_0) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)$. A stacionárius pont típusát a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltjai és a másodrendű teljes differenciálja előjelének segítségével határozzuk meg a kritikus pontban.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2.$$

Innen

$$\mathrm{d}^2F\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right) = 2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}y^2 > 0,$$

és a $\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ pont a függvény feltételes minimumának pontja. A függvény minimuma pedig $f_{min} = f\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{5}$.

□

3.3 Feladatok a kétváltozós függvényekből

62. Feladat. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát:

a) $z = \ln(x+y)$;

b) $z = x + \arccos y$;

c) $z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$;

d) $z = \sqrt{y \sin x}$;

e) $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+x^2y^2}$;

f) $z = \ln[x \ln(y-x)]$.

Megoldás. Határozzuk meg, mely halmazon értelmezettek az adott függvények.

a) A $z = \ln(x+y)$ függvény akkor értelmezett, ha az argumentuma nagyobb nullánál, vagyis $x+y > 0$. Innen $D_f: \; y > -x$, illetve az értelmezési tartomány egy félsík, melynek a határát az $y = -x$ egyenes képezi.

◇

b) Ez a függvény minden valós számra értelmezett. Mivel az $\arccos y$ függvény értelmezési tartománya a $-1 \leq y \leq 1$ egyenlőtlenséggel adott, így a $z = x + \arccos y$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in [-1,1]\}$.

◇

c) Az adott függvény akkor értlemezett, ha $x^2 - 4 \geq 0 \;\wedge\; 4 - y^2 \geq 0$. Innen $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ és $y \in [-2, 2]$. Az értelmezési tartomány $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty) \;\wedge\; y \in [-2,2]\}$ alakú.

◇

d) A függvény értelmezett, ha $y \sin x \geq 0$. Ez az egyenlőtlenség két esetben teljesül:

- Érvényesek az $y \geq 0 \;\wedge\; \sin x \geq 0$ egyenlőtlenségek. A $\sin x \geq 0$ egyenlőtlenség az $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}]$ intervallumra teljesül. Az értelmezési tartomány innen $D_{f1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2k\pi, (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}] \;\wedge\; y \geq 0\}$.
- Érvényesek az $y \leq 0 \;\wedge\; \sin x \leq 0$ egyenlőtlenségek. A második egyenlőtlenség megoldása az $x \in [(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}]$ halmaz, így a függvény értelmezési tartománya $D_{f2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}] \;\wedge\; y \leq 0\}$.

Az adott függvény értelmezési tartományát a két eset úniójaként kapjuk, vagyis $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D_{f1} \cup D_{f2}\}$.

◇

e) Mivel az arctg függvény minden valós számra értelmezett és $1 + x^2y^2 \neq 0$, így az adott függvény minden rendezett valós számpárra értelmezett, vagyis $D_f = \mathbb{R}^2$.

$\diamond$

f) A logaritmusfüggvény minden pozitív argumentumra értelmezett, vagyis

$$y - x > 0 \ \wedge \ x \ln(y - x) > 0.$$

Innen $y > x$, amiből következik, hogy $D_{f1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$. A második egyenlőtlenség akkor teljesül, ha:

- $x > 0 \ \wedge \ \ln(y - x) > 0$. A második egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $y - x > 1$, vagyis $y > x + 1$. Innen $D_{f2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > x + 1\}$.
- $x < 0 \ \wedge \ \ln(y - x) < 0$. A második egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $0 < y - x < 1$, vagyis $x < y < x + 1$. Innen $D_{f3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \ \wedge \ x < y < x + 1\}$.

Az értelmezési tartományt felírhatjuk a következő módon: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D_{f1} \cap \{D_{f2} \cup D_{f3}\}\}$.

$\diamond$

63. Feladat. Határozza meg a következő függvények elsőrendű és másodrendű parciális deriváltjait:

a) $f(x, y) = \frac{y}{x}$;

b) $f(x, y) = e^{xy}$;

c) $f(x, y) = -2x^3y^3 - 3xy^3 - 2x^3y + 3$;

d) $f(x, y) = \ln x + \ln y - \ln(x^2 + y^3)$;

e) $f(x, y) = \frac{2}{x^2+y^2}$;

f) $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$;

g) $f(x, y) = \frac{1}{y}e^{-x^2/y}$;

h) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Megoldás. A parciális deriváltak meghatározásához főleg a láncszabályt és a függvények szorzata illetve hányadosa deriváltjának képletét használjuk.

a) Írjuk fel az adott függvényt az $f(x, y) = \frac{y}{x} = yx^{-1}$ alakban. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -yx^{-2} = -\frac{y}{x^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(-2)yx^{-3} = \frac{2y}{x^3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

$\diamond$

b) A függvény elsőrendű deriváltjainak kiszámításához alkalmazzuk a láncszabályt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}.$$

A másodrendű parciális deriváltak kiszámításához alkalmazzuk a függvények szorzata deriváltjának képletét is:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1+xy); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

◇

c) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x^2y^3 - 3y^3 - 6x^2y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x^3y^2 - 9xy^2 - 2x^3.$$

Másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -12xy^3 - 12xy = -12xy(y^2-1); \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -18x^2y^2 - 9y^2 - 6x^2 = -3(2x^2 + 6x^2y^2 + 3y^2); \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -12x^3y - 18xy = -6xy(x^2+1).
\end{aligned}$$

◇

d) A függvények szorzata és hányadosa deriváltjának képletét alkalmazva, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+y^3}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{3y^2}{x^2+y^3}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2} - \frac{2(x^2+y^3) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^3)^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2y^3 - 2x^2}{(x^2+y^3)^2}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{2x \cdot 3y^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{6xy^2}{(x^2+y^3)^2};
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} - \frac{6y(x^2+y^3) - 3y^2 \cdot 3y^2}{(x^2+y^3)^2} = -\frac{1}{y^2} - \frac{6x^2y - 3y^4}{(x^2+y^3)^2}.$$

◇

e) A parciális deriváltakat a következő módon kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4y}{(x^2+y^2)^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-4(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot(-4x)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-4(x^2+y^2)+16x^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{4(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{8x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{16xy}{(x^2+y^2)^3};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-4(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\cdot 2y\cdot(-4y)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-4(x^2+y^2)+16y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{4(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}
$$

◇

f) A függvények hányadosa deriváltjának képletét és a láncszabályt alkalmazva a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y(x-y)-xy}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x-y)-(-1)\cdot xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -y^2\cdot(-2)(x-y)^{-3}\cdot 1 = \frac{2y^2}{(x-y)^3};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-2y(x-y)^2 - 2(x-y)\cdot(-1)\cdot(-y^2)}{(x-y)^4} = \frac{-2(x-y)-2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2x^2\cdot(-1)}{(x-y)^3} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}.
\end{aligned}
$$

◇

g) A függvények szorzatának deriváltját alkalmazzuk.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{y}\cdot\frac{-2x}{y}e^{-x^2/y} = -\frac{2x}{y^2}e^{-x^2/y};\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2}e^{-x^2/y} + \frac{1}{y}\cdot\frac{x^2}{y^2}e^{-x^2/y} = \frac{e^{-x^2/y}(x^2-y)}{y^3};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{2}{y^2}e^{-x^2/y} - \frac{2x}{y^2}\cdot\frac{-2x}{y}e^{-x^2/y} = e^{-x^2/y}\left(\frac{4x^2}{y^3}-\frac{2}{y^2}\right) = 2\frac{e^{-x^2/y}(2x^2-y)}{y^3};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{4x}{y^3}e^{-x^2/y} - \frac{2x}{y^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}e^{-x^2/y} = e^{-x^2/y}\left(\frac{4x}{y^3}-\frac{2x^3}{y^4}\right) = 2\frac{e^{-x^2/y}x(2y-x^2)}{y^4};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2}{y^3}e^{-x^2/y} - \frac{1}{y^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}e^{-x^2/y} - \frac{3x^2}{y^4}e^{-x^2/y} + \frac{x^2}{y^3}\cdot\frac{x^2}{y^2}e^{-x^2/y} =\\
&= \frac{2}{y^3}e^{-x^2/y} - \frac{4x^2}{y^4}e^{-x^2/y} + \frac{x^4}{y^5}e^{-x^2/y} = \frac{e^{-x^2/y}(x^4-4x^2y+2y^2)}{y^5}.
\end{aligned}
$$

◇

h) Mivel $(\text{arctg}\, t)' = \frac{1}{1+t^2}$, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2};\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

◇

64. Feladat. Határozza meg az adott függvények elsőrendű és másodrendű teljes differenciáljait:

a) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$;

b) $f(x,y) = 4xy + \ln xy$;

c) $f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$;

d) $f(x,y) = \sin xy$;

e) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

f) $f(x,y) = yx^y$.

Megoldás. Határozzuk meg először a függvények elsőrendű és másodrendű parciális deriváltjait, majd írjuk fel a differenciálokat is.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3y-3x^2 = 3(y-x^2); \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x-3y^2 = 3(x-y^2);\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6x; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 3; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.
\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 3(y-x^2)\,\mathrm{d}x + 3(x-y^2)\,\mathrm{d}y;\\
\mathrm{d}^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2 = -6x\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 6y\,\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

◇

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 4y + \frac{1}{xy}\cdot y = 4y + \frac{1}{x}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + \frac{1}{xy}\cdot x = 4x + \frac{1}{y};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.
\end{aligned}$$

Innen felírhatjuk a függvény elsőrendű és másodrendű differenciálját.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= (4y + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x + (4x + \frac{1}{y})\,\mathrm{d}y; \\
\mathrm{d}^2 f &= -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 8\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

◇

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x \cdot \cos y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \cdot \sin y; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin x \cdot \cos y; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos x \cdot \sin y; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \cdot \cos y.
\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \cos x \cdot \cos y\,\mathrm{d}x - \sin x \cdot \sin y\,\mathrm{d}y; \\
\mathrm{d}^2 f &= -\sin x \cdot \cos y\,\mathrm{d}x^2 - 2\cos x \cdot \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \sin x \cdot \cos y\,\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

◇

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= y \cos xy; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -y \cdot y \sin xy = -y^2 \sin xy; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \cos xy + y(-\sin xy) \cdot x = \cos xy - xy \sin xy; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x \cdot x(-\sin xy) = -x^2 \sin xy.
\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= y \cos xy\,\mathrm{d}x + x \cos xy\,\mathrm{d}y; \\
\mathrm{d}^2 f &= -y^2 \sin xy\,\mathrm{d}x^2 + 2(\cos xy - xy \sin xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - x^2 \sin xy\,\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

◇

e)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2};\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y;\\
\mathrm{d}^2 f &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x^2 - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

◇

f) Mivel $(a^x)' = a^x \ln a,\ a = \text{const.}$, innen következik:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= y\cdot yx^{y-1} = y^2x^{y-1}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y + y\cdot x^y \ln x = x^y(1+\ln x^y);\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2\cdot(y-1)x^{y-2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2y\cdot x^{y-2} + y^2\cdot x^{y-1}\ln x = yx^{y-1}(2+y\ln x) = yx^{y-1}(2+\ln x^y);\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^y \ln x + \ln x(x^y \ln x + x^y) = x^y \ln x(1+\ln x^y + 1) = x^y \ln x(2+\ln x^y).
\end{aligned}$$

A függvény teljes differenciáljai:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= y^2x^{y-1}\,\mathrm{d}x + x^y(1+\ln x^y)\,\mathrm{d}y;\\
\mathrm{d}^2 f &= y^2(y-1)x^{y-2}\mathrm{d}x^2 + 2yx^{y-1}(2+\ln x^y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + x^y\ln x(2+\ln x^y)\,\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

◇

65. Feladat. Határozza meg az adott függvények másodfokú Maclaurin-polinomját.

a) $f(x,y) = -x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$;

b) $f(x,y) = e^{x+y}$;

c) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$;

d) $f(x,y) = e^x \sin y$.

Megoldás. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakkal bezárólag a deriváltak értékét a $(0,0)$ pontban. A kapott értékeket helyettesítsük be a másodfokú Maclaurin-polinomba.

a) Könnyen kiszámítható, hogy $f(0,0) = -4$, a parciális deriváltak értékei a $(0,0)$ pontban pedig:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -2x + 2y - 6; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -6;\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x + 6y - 2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2;\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6.\end{aligned}$$

Innen a másodfokú Maclaurin-polinom a következő alakú:

$$\begin{aligned}M_2 &= -4 + \frac{1}{1!}(-6x - 2y) + \frac{1}{2!}(-2x^2 + 4xy + 6y^2) =\\ &= -4 - 6x - 2y - x^2 + 2xy - 3y^2.\end{aligned}$$

◇

b) Mivel $f(0,0) = e^0 = 1$ és érvényes $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x+y}$, a következőt kapjuk: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = e^0 = 1$. Innen a függvény másodfokú Maclaurin-polinomja:

$$M_2(x,y) = 1 + x + y + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2.$$

◇

c) A függvény értéke a $(0,0)$ pontban $f(0,0) = \ln 1 = 0$. A parciális deriváltakra érvényes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+x+y}, \text{ illetve } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Úgyszintén érvényes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(1+x+y)^2};\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1.\end{aligned}$$

A függvény másodrendű Maclaurin-polinomját felírhatjuk a következő módon:

$$M_2(x,y) = 0 + x + y + \frac{1}{2}(-x^2 - 2xy - y^2) = x + y - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2.$$

◇

d) $f(0,0) = e^0 \sin 0 = 0$. A parciális deriváltakra érvényes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x \cos y;; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

A másodrendű Maclaurin-polinom $M_2(x,y) = y + xy$ alakú.

◇

66. Feladat. Határozza meg a következő függvények másodfokú Taylor-polinomját az adott pontok körül.

a) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^3$ az $(x_0,y_0) = (1,1)$ körül;

b) $f(x,y) = y \ln x$ az $(x_0,y_0) = (1,0)$ körül;

c) $f(x,y) = ye^{-x^2 y}$ az $(x_0,y_0) = (0,1)$ körül;

d) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ az $(x_0,y_0) = (1,1)$ körül.

Megoldás. Számítsuk ki mindegyik feladatnál a függvény illetve a másodrendű parciális deriváltakkal bezárólag a deriváltak értékét az adott pontokban.

a) $f(1,1) = 0$, a parciális deriváltak értékeire a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 3y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(,1,) = -1; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4y; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -4; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x + 6y; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 2.
\end{aligned}$$

Ha behelyettesítjük a kapott értékeket a Taylor-polinom képletébe, a következő polinomot kapjuk:

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= -(y-1) + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 - 2 \cdot 4(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right) = \\
&= 1 - y + (x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2.
\end{aligned}$$

◇

b) $f(1,0) = 0$, a parciális deriváltak értékei pedig:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 1; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Innen $T_2(x,y) = (x-1)y$.

◇

c) $f(0,1) = 1 \cdot e^{0\cdot 1} = 1$, a parciális deriváltakra érvényes, hogy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{-x^2y}\cdot(-2xy) = -2xy^2e^{-x^2y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-x^2y} + ye^{-x^2y}\cdot(-x^2) = e^{-x^2y}(1-x^2y); \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2y^2\left(e^{-x^2y} + xe^{-x^2y}\cdot(-2xy)\right) = -2y^2e^{-x^2y}(1-2x^2y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -2;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= -2x\left(2ye^{-x^2y} + y^2e^{-x^2y}\cdot(-x^2)\right) = -2xye^{-x^2y}(2-x^2y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) = 0;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -x^2e^{-x^2y}(1-x^2y) - x^2e^{-x^2y} = -x^2e^{-x^2y}(2-x^2y); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0.
\end{aligned}$$

Innen $T_2(x,y) = 1 + (y-1) + \frac{1}{2}\cdot(-2x^2) = y - x^2$.

◇

d) A függvény értéke az $(1,1)$ pontban $f(1,1) = \frac{1}{2}$. A parciális deriváltakra a következő értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x(x^2+y^2) - 4x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} =\\
&= \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{2y(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y(x^2+y^2) - 4y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} =\\
&= \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = \frac{1}{2};\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2x(x^2+y^2)^2 + 2xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x(x^2+y^2) + 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} =\\
&= \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Innen a másodfokú Taylor-polinom a következő alakú:

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2\right) =\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + \frac{1}{4}(y-1)^2.
\end{aligned}$$

◇

67. Feladat. Határozza meg a következő függvények szélső értékeit.

a) $z = x^2 + 4x + y^2 - 6y + 10$;

b) $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y, \ x > 0, y > 0$;

c) $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

d) $z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln (12 - x - y)$;

e) $f(x, y) = xy(x + y - 1)$;

f) $f(x, y) = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$.

Megoldás. Először a függvények kritikus pontjait kell megtalálni, majd a szélső érték típusát.

a) A függvény elsőrendű parciális deriváltjai: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4$ és $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6.$ A kritikus pontokat a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \\ 2y - 6 &= 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3. \end{aligned}$$

A kritikus pont: $(x_0, y_0) = (-2, 3).$ A szélső érték típusát a másodrendű parciális deriváltak segítségével vizsgáljuk ki: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ és $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. Innen

$$D = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2, 3) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2, 3) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2, 3)\right)^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4.$$

Mivel $D > 0$, a $(-2, 3)$ pontban a függvénynek van szélső értéke, és mivel $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, 3) = 2 > 0$, a függvénynek ebben a pontban minimuma van. A függvény minimuma: $z_{min} = z(-2, 3) = -3.$

◇

b) A függvény elsőrendű parciális deriváltjait egyenlítsük ki nullával, majd az így kapott egyenletrendszert oldjuk meg.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{8}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{8} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \equiv -\frac{x}{y^2} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ha az y-t behelyettesítjük a második egyenletbe, megkapjuk az egyenletrendszer megoldását, vagyis a függvény kritikus pontját: $(x_0, y_0) = (4, 2)$. Számítsuk ki a függvény másodrendű deriváltjait is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^2}{\partial x^2} &= \frac{16}{x^3}; \quad \frac{\partial z^2}{\partial x^2}(4, 2) = \frac{1}{4}; \quad \frac{\partial z^2}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}; \quad \frac{\partial z^2}{\partial y^2}(4, 2) = 1; \\ \frac{\partial z^2}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial z^2}{\partial x \partial y}(4, 2) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Mivel $D = \frac{1}{4} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} > 0$ és$\frac{\partial z^2}{\partial x^2}(4, 2) = \frac{1}{4} > 0$, a $(4, 2)$ pontban a függvénynek minimuma van. A függvény minimuma: $z_{min} = z(4, 2) = 6.$

◇

c) A kritikus pontot a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \sqrt{y} - 2x + 6 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} - 2x = -6 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y\sqrt{y}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Ha a $\sqrt{y}$-t a második egyenletből behelyettesítjük az első egyenletbe, megkapjuk az egyenletrendszer megoldását: $x = 4$ és $y = 4$. A függvény kritikus pontja $(x_0, y_0) = (4, 4)$. A függvény másodrendű parciális deriváltjainak értéke a kritikus pontban:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x}{4y\sqrt{y}}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,4) = -\frac{1}{8}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{y}}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(4,4) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Innen $D = -2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}^2 = \frac{3}{16} > 0$, vagyis a kritikus pont egyben szélső érték is. Mivel $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4) = -2 < 0$, a $(4,4)$ pontban a függvénynek maximuma van, és $f_{max} = f(4,4) = 15$.

◇

d) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3 \cdot \frac{1}{\frac{x}{6}} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{12 - x - y} = \frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y}.\end{aligned}$$

Ha kiegyenlítjük őket nullával, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y} &= 0 \Rightarrow \frac{3(12 - x - y) - x}{x(12 - x - xy)} = 0 \\ \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y} &= 0 \Rightarrow \frac{2(12 - x - y) - y}{y(12 - x - xy)} = 0\end{aligned}$$

Az egyenletrendszerben jelentkező kifejezések rendezése után a következő egyenletrendszert kapjuk azzal a kikötéssel, hogy az előző egyenletrendszerben jelentkező tört nevezője különböző nullától, vagyis $x \neq 0, y \neq 0, 12 - x - y \neq 0$:

$$\begin{aligned}4x + 3y &= 36 \\ 2x + 3y &= 24,\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásaként az $(x_0, y_0) = (6, 4)$ kritikus pontot kapjuk. A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(6,4) = -\frac{1}{3};\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(6,4) = -\frac{3}{8};\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{-1}{(12-x-y)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(6,4) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Mivel $D = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} > 0$ és $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(6,4) = -\frac{1}{3} < 0$, a $(6,4)$ pontban a függvénynek lokális maximuma van. A függvény maximuma $z_{max} = z(6,4) = 5 \ln 2$.

◇

e) Az adott függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= y(x+y-1) + xy = 2xy + y^2 - y = y(2x+y-1);\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x(x+y-1) + xy = 2xy + x^2 - x = x(x+2y-1).
\end{aligned}$$

Ha kiegyenlítjük őket nullával, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
y(2x+y-1) &= 0\\
x(x+2y-1 &= 0.
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek négy megoldása van.

- Az első megoldás $x = y = 0$, vagyis $(x_1, y_1) = (0,0)$.
- A második megoldást a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned}
2x + y &= 1\\
x + 2y &= 1
\end{aligned}$$

  Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
- A harmadik megoldást a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned}
y &= 0\\
x + 2y &= 1
\end{aligned}$$

  Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $(x_3, y_3) = (1,0)$.
- A negyedik megoldást a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned}
2x + y &= 1\\
x &= 0.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $(x_4, y_4) = (0, 1)$.

Ellenőrizzük le a kapott kritikus pontok típusát. A függvény másodrendű parciális deriváltjai: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y - 1$. Helyettesítsük be a kritikus pontokat a kapott kifejezésekbe:

- $(x_1, y_1) = (0, 0)$: a függvény másodrendű parciális deriváltjainak értéke ebben a pontban $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$. Innen $D(0,0) = -1 < 0$, vagyis a $(0,0)$ pont nem szélső érték, hanem a függvény nyeregpontja.
- $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$: a másodrendű parciális deriváltak értéke ebben a pontban $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Innen $D\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0$, vagyis a kritikus pontban a függvénynek minimuma van. A minimum pedig: $f_{min} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$.
- $(x_3, y_3) = (1, 0)$: a másodrendű parciális deriváltak értéke a kritikus pontban $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 1$. Innen $D(1,0) = 0 \cdot 2 - (1)^2 = -1 < 0$, vagyis a függvénynek az $(1,0)$ pontban nyeregpontja van.
- $(x_4, y_4) = (0, 1)$: a másodrendű parciális deriváltak éréke ebben a kritikus pontban: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 1$. Innen $D(0,1) = 2 \cdot 0 - (1)^2 = -1 < 0$ és a függvénynek a $(0,1)$ pontban nyeregpontja van.

◇

f) A függvény kritikus pontjait a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\equiv 2xy^2 - \frac{2}{x^3y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2xy^2 = \frac{2}{x^3y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\equiv 2x^2y - \frac{2}{x^2y^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2y = \frac{2}{x^2y^3} \end{aligned}$$

Innen $x^4 = \frac{1}{y^4}$. Ez az egyenlőség akkor érvényes, ha $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, -1)$, $(x_3, y_3) = (-1, 1)$, és $(x_4, y_4) = (-1, -1)$, tehát a függvénynek négy kritikus pontja van. A másodrendű parciális deriváltak: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 + \frac{6}{x^4y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + \frac{6}{x^2y^4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy + \frac{4}{x^3y^3}$. Ha behelyettesítjük a stacionárius pontokat a kapott kifejezésekbe, a következőt kapjuk: $D(1,1) = D(1,-1) = D(-1,1) = D(-1,-1) = 0$.

Innen nem tudjuk megállapítani, hogy a kapott kritikus pont egyben a függvény szélső értéke-e.

◇

68. Feladat. Határozza meg a következő függvények feltételes szélső értékeit, ha adottak a feltételek.

a) $f(x, y) = y^2 - x^2 + 5$ a $y + 2x = 16$ feltétel mellett;

b) $f(x, y) = 2x - y$ a $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett;

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ a $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett;

d) $f(x, y) = x^2 - y^2$ a $x^2 + y^2 = 4$ feltétel mellett.

Megoldás. A feltételes szélső értékeket úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk a Lagrange-függvény feltétel nélküli szélső értékeit.

a) A Lagrange-függvény $F(x, y, \lambda) = y^2 - x^2 + 5 + \lambda(y + 2x - 16)$ alakú. A stacionárius pontokat a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv -2x + 2\lambda &= 0 \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow x = -2y \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2y + \lambda &= 0 \Rightarrow \lambda = -2y \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv y + 2x &= 16 \Rightarrow y = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

Innen $(x_0, y_0, \lambda_0) = \left(\frac{32}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{32}{3}\right)$.
Számítsuk ki a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltjait.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2.$$

A Lagrange-függvény másodrendű teljes differenciálja:

$$\mathrm{d}^2 F\left(\frac{32}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{16}{3}\right) = -2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}y^2.$$

Ebből a kifejezésből nem lehet meghatározni a $\mathrm{d}^2 F$ előjelét, ezért felírjuk az $u(x, y) = y + 2x - 16$ feltétel első teljes differenciálját, majd azt kiegyenlítjük nullával:

$$\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$$

Innen $\mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}x$. Ha a kapott kifejezést behelyettesítjük a $\mathrm{d}^2 F$-be, akkor

$$\mathrm{d}^2 F\left(\frac{32}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{16}{3}\right) = -2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}y^2 = -2\,\mathrm{d}x^2 + 2(-2\,\mathrm{d}x)^2 = 6\,\mathrm{d}x^2 > 0,$$

vagyis a $\left(\frac{32}{3}, -\frac{16}{3}\right)$ pontban van az adott függvény feltételes minimuma: $f_{min} = f\left(\frac{32}{3}, -\frac{16}{3}\right) = -\frac{241}{3}$.

◇

b) A Lagrange-függvény $F(x, y\lambda) = 2x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ alakú. Innen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2 + 2x\lambda &= 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv -1 + 2y\lambda &= 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv x^2 + y^2 &= 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{5 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszernek két megoldása van, vagyis a Lagrange-függvénynek két kritikus pontja van: $A = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ és $B = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.
Számítsuk ki a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltjainak értékét az A és B pontokban:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 2\lambda; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A) = \sqrt{5}; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B) = -\sqrt{5};\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0;\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 2\lambda; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A) = \sqrt{5}; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B) = -\sqrt{5};
\end{aligned}$$

Innen $\mathrm{d}^2F(A) = \sqrt{5}\,\mathrm{d}x^2 + \sqrt{5}\,\mathrm{d}y^2 > 0$, vagyis a $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ pontban van az adott függvény feltételes minimuma: $f_{min} = f\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\sqrt{5}$.
A B pontra $\mathrm{d}^2F(B) = -\sqrt{5}\,\mathrm{d}x^2 - \sqrt{5}\,\mathrm{d}y^2 < 0$, vagyis a $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ pont a függvény feltételes maximuma: $f_{max} = f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \sqrt{5}$.

◇

c) A Lagrange-függvény $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$ alakú. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x - 12 + 2x\lambda &= 0 \Rightarrow 2x(1+\lambda) = 12 \Rightarrow x = \frac{6}{1+\lambda}\\
\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2y + 16 + 2y\lambda &= 0 \Rightarrow 2y(1+\lambda) = -16 \Rightarrow y = \frac{-8}{1+\lambda}\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv x^2 + y^2 - 25 &= 0 \Rightarrow \frac{36}{(1+\lambda)^2} + \frac{64}{(1+\lambda)^2} - 25 = 0
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $\frac{100-25(1+\lambda)^2}{(1+\lambda)^2} = 0$, a kifejezés rendezése után pedig a $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Az egyenlet megoldása $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -3$. Ha behelyettesítjük ezeket a megoldásokat az egyenletrendszer első két egyenletébe, megkapjuk az x és y értékét is: $x_{1/2} = \pm 3$ és $y_{1/2} = \mp 4$. A Lagrange-függvény kritikus pontjai: $A = (3, -4, 1)$ és $B = (-3, 4, -3)$. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltak értékeit ezekben a pontokban.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 2 + 2\lambda; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A) = 4; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B) = -4;\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0;\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 2 + 2\lambda; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A) = 4; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B) = -4.
\end{aligned}$$

A Lagrange-függvény másodrendű teljes differenciálja $\mathrm{d}^2F(A) = 4\,\mathrm{d}x^2 + 4\,\mathrm{d}y^2 > 0$, vagyis a $(3, -4)$ pontban van a függvény feltételes minimuma: $f_{min} = f\,(3, -4) = -75$.

A B pontra érvényes, hogy $\mathrm{d}^2F(B) = -4\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}y^2 < 0$, vagyis a $(-3,4)$ pontban van a függvény feltételes maximuma: $f_{max} = f(-3,4) = 125$.

◇

d) Az adott feltételt implicit függvényként is felírhatjuk: $u(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. A Lagrange-függvény $F(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ alakú. A Lagrange-függvény stacionárius pontjait a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x + 2\lambda x &= 0 \Rightarrow 2x(1+\lambda) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} \equiv -2y + \lambda y &= 0 \Rightarrow -2y(1-\lambda) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv x^2 + y^2 &= 4
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek négy megoldása van.

- Az első egyenletből $x = 0$. Akkor a harmadik egyenletből $y^2 = 4$, vagyis $y_{1/2} = \pm 2$. A második egyenletből $1 - \lambda = 0$, vagyis $\lambda = 1$. Ennek alapján az egyenletrendszernek két megoldása van: $A(0,2,1)$ és $B(0,-2,1)$.
- A második egyenletből $y = 0$, és behelyettesítve a harmadik egyenletbe, $x^2 = 4$, vagyis $x_{1/2} = \pm 2$. Hogy az első egyenlet is teljesüljön, $1 + \lambda = 0$ kell, hogy legyen, vagyis $\lambda = -1$. Tehát még két megoldásunk van: $C(2,0,-1)$ és $D(-2,0,-1)$.

A kritikus pontok típusának kivizsgálása érdekében határozzuk meg a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltjait.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2 + 2\lambda.$$

Mindegyik stacionárius pontban külön vizsgáljuk ki a Lagrange-függvény másodrendű teljes differenciáljnak előjelét.

- $A(0,2,1)$: mivel $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A) = 4$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A) = 0$, a Lagrange-függvény másodrendű teljes differenciálja $\mathrm{d}^2F(A) = 4\,\mathrm{d}x^2 > 0$ alakú, vagyis a $(0,2)$ pontban a függvénynek feltételes minimuma van, $z_{min} = f(A) = -4$.
- $B(0,-2,1)$: mivel $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B) = 4$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(B) = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(B) = 0$, a Lagrange-függvény másodrendű differenciálja $\mathrm{d}^2F(B) = 4\,\mathrm{d}x^2 > 0$ alakú, vagyis a $(0,-2)$ pontban az adott függvénynek feltételes minimuma van, $z_{min} = f(B) = -4$.
- $C(2,0,-1)$: mivel $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(C) = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(C) = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(C) = -4$, a Lagrange-függvény másodrendű differenciáljának $\mathrm{d}^2F(C) = -4\,\mathrm{d}x^2 < 0$ alakja van, innen a $(2,0)$ pontban a függvénynek feltételes maximuma van, $z_{max} = f(C) = 4$.

- $D(-2, 0, -1)$: mivel $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(D) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(D) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(D) = -4$, a másodrendű teljes differenciál $\mathrm{d}^2 F(D) = -4\,\mathrm{d}x^2 < 0$ negatív, vagyis a $(-2, 0)$ pontban a függvénynek feltételes maximuma van, $z_{max} = f(D) = 4$.

◇

3.3.1 Gyakorlásra szánt feladatok

69. Feladat. Vizsgálja ki a $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ függvény értelmezési tartományát.

70. Feladat. Vizsgálja ki a $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$ függvény értelmezési tartományát.

71. Feladat. Vizsgálja ki a $f(x, y) = \ln[x \ln(y - x)]$ függvény értelmezési tartományát.

72. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltjait.

73. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x^2}{y}}$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltjait.

74. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = (1 + 2xy)^x$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltjait.

75. Feladat. Egyszerűsítse a $x\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ kifejezést, ahol $f(x, y) = y \ln x$.

76. Feladat. Írja fel az $f(x, y) = \operatorname{arctg} xy$ függvény első- és másodrendű teljes differenciálját.

77. Feladat. Írja fel az $f(x, y) = 3\frac{x}{y} + \ln xy$ függvény első- és másodrendű teljes differenciálját.

78. Feladat. Írja fel az $f(x, y) = e^{x+y} + x^2 + y^2$ függvény első- és másodrendű teljes differenciálját.

79. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = e^x \ln y$ függvényt másodfokú Taylor-polinomba az $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ pont körül.

80. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = \cos x \cos y$ függvényt másodfokú Maclaurin-polinomba.

81. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = y^x$ függvényt másodfokú Taylor-polinomba az $(x_0, y_0) = (1, 1)$ pont körül.

82. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = 2x^4y^3 + 3x^2y^2$ függvényt másodfokú Taylor-polinomba az $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ pont körül.

83. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = 3 \ln \frac{x}{6} + \frac{1}{2}y^3$ függvényt másodfokú Taylor-polinomba az $(x_0, y_0) = (6, 1)$ pont körül.

84. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = 3y^4x^3 + 2xy^2 + 1$ függvényt másodfokú Taylor-polinomba az $(x_0, y_0) = (1, 1)$ pont körül.

85. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = x\sqrt{y}$ függvényt másodfokú polinomba az $(x_0, y_0) = (1, 4)$ pont körül.

86. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = e^{2x^2+3y}$ függvényt másodfokú Maclaurin-polinomba.

87. Feladat. Fejtse az $f(x, y) = e^{-2xy}$ függvényt másodfokú Maclaurin-polinomba.

88. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ függvény szélső értékeit.

89. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ függvény szélső értékeit.

90. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ függvény szélső értékeit.

91. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ függvény szélső értékeit.

92. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$ függvény szélső értékeit.

93. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = (x-y)^2 + y^2$ függvény szélső értékeit.

94. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény feltételes szélső értékeit az $x + 2y = 4$ feltétel mellett.

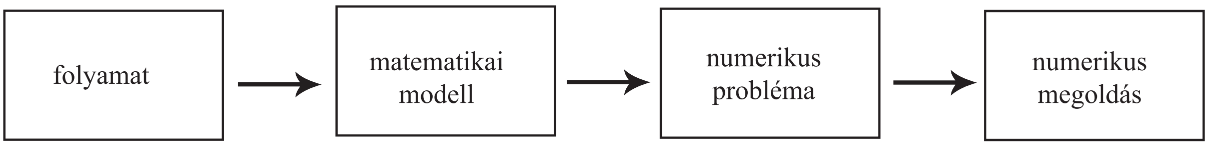
95. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3$ függvény feltételes szélső értékeit az $x + y = 1$ feltétel mellett.

96. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = 2x^2 + xy$ függvény feltételes szélső értékeit az $x + y = 1$ feltétel mellett.

4. fejezet

Numerikus módszerek

A természettudományokban, a technikai tudományokban és a társadalmi tudományokban is a folyamatok modellezése fontos feladat, melyben egyes paraméterek hatását tanulmányozzák a folyamat kimenetelére. A fizikai valóság folyamatainak leírására többek között a matematikai modellt használják. A folyamat matematikai modellje nem vesz figyelembe minden tényezőt amely kihatással van a folyamat kimenetelére, így a matematikai modell a valós folyamat leegyszerűsített modellje, melyet egyeztetni kell a kísérlettel elért eredményekkel. Annak ellenére, hogy a matematikai modell a valós folyamat leegyszerűsített modellje és nem vesz figyelembe minden tényezőt, néha annyira bonyolult lehet, hogy analitikusan nem lehet megoldani. Ebben az esetben a matematikai modellt annyira leegyszerűsítik, hogy analitikusan megoldható legyen, vagy pedig numerikus problémával approximálják a matematikai modellt, majd numerikus módszerekkel oldják meg. Az első módszer gyakran nem elfogadható, mivel a leegyszerűsített modell túlságosan külön-



4.1. ábra: Folyamat modellezése

bözhet a valós folyamattól, így a megoldása is használhatatlan lehet. A numerikus módszerek szintén hibát ejtenek, viszont ez a hiba és a hiba hatása a pontos eredményre felbecsülhető.

4.1 Hibaelmélet

Amikor a matematikai modellt numerikus problémával approximáljuk és ezt a problémát valamely numerikus módszerrel oldjuk meg, hibák keletkeznek, amelyeket három csoportba sorolhatunk:

Öröklött hibák: Azok a valóságtól való eltérések, melyek már a számítások megkezdésekor jelen vannak. A kiinduló pontok pontatlansága (méréshiba) vagy a matematikai modell hibája. Nem megelőzhetők.

Számítási hibák: A függvények és a képletek értékének kiszámításakor a számítást véges számú tizedessel végezzük, így hibát ejtünk. A valós számokkal való aritmetikai műveleteknél kerekítési hiba lép fel. A tizedes számok kerekítését k számjegyre úgy végezzük, hogy a k-adik számjegyet eggyel növeljük, ha a $(k+1)$-edik számjegy ötnél nagyobb, ha pedig kisebb ötnél, akkor nem változtatjuk. Ha a $(k+1)$-edik számjegy öttel egyenlő, és utána nincs több számjegy, akkor a k-adik számjegyet eggyel megnöveljük, ha az páratlan, illetve nem változtatjuk, ha az páros.

Végtelen műveletek által okozott hibák: Akkor keletkeznek, ha egy végtelen folyamatot végessel helyettesítünk, pl. mikor a végtelen sor összegét a sor részletösszegével helyettesítjük.

4.1.1 Közelítő számok és hibák

A numerikus probléma megoldása az x pontos mennyiség x^* közelítő értéke.

21. Definíció. Jelölje az x^* az x pontos szám közelítő értékét. Az x^* közelítő szám abszolút hibája:

$$|\Delta(x^*)| = |x - x^*|. \tag{4.1}$$

Az x^* közelítő szám abszolút hibakorlátja vagy hibahatára minden olyan Δ_{x^*} szám, melyre érvényes az $|\Delta(x^*)| \leq \Delta_{x^*}$ egyenlőtlenség.

Az x pontos szám több módon kifejezhető az x^* közelítő szám és a Δ_{x^*} abszolút hibakorlát segítségével:

- $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$;
- $x^* - \Delta_{x^*} \leq x \leq x^* + \Delta_{x^*}$.

25. Példa. Legyen $x^* = 1.414$ az $x = \sqrt{2}$ irracionális szám közelítő értéke. Határozza meg a közelítés abszolút hibáját és hibakorlátját.

Megoldás. Az abszolút hibát a 4.1 képlet segítségével számítjuk ki:

$$|\Delta(x^*)| = |x - x^*| = |\sqrt{2} - 1.414| = 0.0002135\ldots.$$

Abszolút hibahatárnak tekinthetjük a $\Delta_{x^*} = 0.00022$ számot, mivel teljesül az abszolút hibahatárt definiáló egyenlőtlenség.
Az abszolút hibahatárt és a pontos számot felírhatjuk a következő alakban is: $\Delta_{x^*} = 0.22 \cdot 10^{-3}$, $x = 1.414 \pm 0.22 \cdot 10^{-3}$ és $1.41378 \leq x \leq 1.41422$.

□

Amikor különböző nagyságrendű közelítő mennyiségek pontosságát hasonlítjuk össze, az abszolút hiba nem megfelelő összehasonlítási alap. Például, az 1000.1 közelítő szám közel van az 1000 pontos számhoz, még az 1.1 közelítő szám nem elég jó közelítése az 1 pontos számnak. Ezért vezetjük be a relatív hiba fogalmát.

22. Definíció. Jelölje az $x^* \neq 0$ az x pontos szám közelítő értékét. Az $x^* \neq 0$ közelítő szám relatív hibája:

$$\delta(x^*) = \frac{|\Delta(x^*)|}{|x^*|} = \frac{|x - x^*|}{|x^*|}. \tag{4.2}$$

Az $x^* \neq 0$ szám relatív hibakorlátja vagy relatív hibahatára minden olyan δ_{x^*} szám, melyre érvényes az $\delta(x^*) \leq \delta_{x^*}$ egyenlőtlenség.

A relatív hibát és a relatív hibahatárt százalékban vagy pedig $\pm m \cdot 10^n,\ 0.1 \leq m < 1,\ n \in \mathbb{N}$ alakban is kifejezhetjük. Az x pontos számot felírhatjuk az x^* közelítő szám és a δ_{x^*} relatív hiba segítségével:

$$x = x^*(1 \pm \delta_{x^*}).$$

A relatív hibahatárt kiszámíthatjuk az abszolút hibahatár segítségével: $\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}$. Ezt a képletet a fenti képletek segítségével vezethetjük le:

$$\delta(x^*) = \frac{|\Delta(x^*)|}{|x^*|} \leq \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|},$$

innen

$$\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}. \tag{4.3}$$

26. Példa. Legyen $e^* = 2.72$ az $e = 2.7183\ldots$ pontos szám közelítő értéke. Számítsa ki az e^* szám relatív hibáját és hibahatárát.

Megoldás. Ha a 4.2 képletet alkalmazzuk, akkor

$$\delta(x^*) = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} = \frac{|2.7183 - 2.72|}{|2.72|} = 0.000625 = 0.625 \cdot 10^{-3} = 0.0625\%.$$

Relatív hibahatárnak vehetjük a $\delta_{x^*} = 0.63 \cdot 10^{-3}$ számot. Az e számot felírhatjuk az $e = 2.72 \cdot (1 \pm 0.63 \cdot 10^{-3})$ alakban.

□

23. Definíció. Egy szám értékes számjegyei alatt az első nullától különböző számjegyet és az összes tőle jobbra elhelyezkedő számjegyet értjük.

Például az 1.7230 számnak öt értékes számjegye, még a 0.0491 számnak három értékes számjegye van.

24. Definíció. Legyen x nullától különböző valós szám. Az x pontos szám x^* közelítő számának n értékes pontos számjegye van, ha érvényes:

$$\delta(x^*) \leq 0.5 \cdot 10^{1-n}. \tag{4.4}$$

Az x^* közelítő szám értékes pontos számjegyei azok a számjegyek, amelyek megegyeznek az x pontos szám számjegyeivel.

27. Példa. Határozza meg az $x = 1657.3$ pontos szám $x^* = 1656.2$ közelítő szám értékes pontos számjegyeit.

Megoldás. Határozzuk először meg a közelítő szám relatív hibáját.

$$\delta(x^*) = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} = \frac{1.1}{1656.2} = 0.00066417 = 0.66417 \cdot 10^{-3}.$$

Innen $\delta(x^*) = 0.66417 \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-2}$, vagyis $1 - n = -2$. Az utolsó egyenletből kiszámíthatjuk, hogy a közelítő szám értékes pontos számjegyeinek száma $n = 3$. Ezek a számjegyek: $1, 6$ és 5.

□

4.1.2 A függvényérték kiszámításának hibája

A függvény értékének kiszámításakor hiba keletkezik, ha a függvény argumentumában lévő számokat kerekítjük.

25. Definíció. Legyen y^* az $y(x_1, x_2, \dots x_n)$ függvény értékének közelítő értéke. Az y^* közelítő érték abszolút hibáját az $|\Delta((y^*)| = |y(x_1, x_2, \dots, x_n) - y^*|$ képlettel definiáljuk. Minden olyan Δ_{y^*} számot, amely eleget tesz az $|\Delta(y^*)| \leq \Delta_{y^*}$ egyenlőtlenségnek, az y^* közelítő érték abszolút hibakorlátjának nevezzük.

26. Definíció. Legyen y^* az $y(x_1, x_2, \dots x_n)$ függvény értékének közelítő értéke. Az y^* közelítő érték relatív hibáját a $\delta(y^*) = \frac{|\Delta(y^*)|}{|y^*|} = \frac{|y-y^*|}{|y^*|}$ képlettel definiáljuk. Minden olyan δ_{y^*} számot, amely eleget tesz a $\delta(y^*) \leq \delta_{y^*}$ egyenlőtlenségnek, az y^* közelítő érték relatív hibakorlátjának nevezzük.

A függvényértékek kiszámításához két feladattípus kapcsolódik:

Direkt probléma: A függvényérték abszolút és relatív hibájának kiszámítása, ha adott a függvény argumentumainak hibája. A függvényérték abszolút hibahatárát a következő lineáris kifejezéssel lehet felbecsülni:

$$\Delta_{y^*} \approx b_1 \Delta_{x_1^*} + b_2 \Delta_{x_2^*} + \dots + b_n \Delta_{x_n^*} = \sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{x_i^*}, \tag{4.5}$$

ahol $b_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) \right|, \; i = 1, 2, \dots n.$

28. Példa. Határozza meg az $y = \frac{x^2+3}{3x^3+1}$ függvény értékének abszolút és relatív hibahatárát, ha $x = 0.01 \pm 0.005$.

Megoldás. Az x pontos szám alakjából következik, hogy $x^* = 0.01$ és $\Delta_{x^*} = 0.005$. Innen az argumentum relatív hibája $\delta(x^*) = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} = \frac{0.005}{0.01} = 0.5 = 0.5 \cdot 10^0 = 50\%$.
A függvény argumentumának relatív hibahatára $\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} = \frac{0.005}{0.01} = 0.5 = 0.5 \cdot 10^0 = 50\%$.
A függvény értékének abszolút hibahatárát a 4.5 képlet segítségével számítjuk ki $n = 1$-re, mivel a függvénynek egy változója van. Számítsuk ki először a b_1-et.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\frac{x^2+3}{3x^3+1} \right)' = \frac{2x(3x^3+1) - 9x^2(x^2+3)}{(3x^3+1)^2} = \frac{-3x^4 - 27x^2 + 2x}{(3x^3+1)^2} \\
b_1 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(0.01) = 0.0173.
\end{aligned}$$

Innen $\Delta_{y^*} \approx b_1 \Delta_{x^*} = 0.0173 \cdot 0.005 = 0.00008649 = 0.8649 \cdot 10^{-4}$. Mivel $y^* = f(x^*) = 3.0001$, a függvényérték relatív hibahatára $\delta_{y^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{|y^*|} \approx \frac{0.8649 \cdot 10^{-4}}{3.0001} = 0.29 \cdot 10^{-4}$.

□

Inverz probléma: A függvényargumentum abszolút és relatív hibájának meghatározása, ha adott a függvényérték ε pontossága. Ez a probléma nem oldható meg egyértelműen, mivel a függvényérték adott hibahatára elérhető az argumentumok különböző hibahatáraival. Az inverz probléma több módon oldható meg. A numerikus matematika tárgy keretein belül csak az *egyenlő hozzájárulások elvét* említjük meg. Ez az elv feltételezi, hogy mindegyik $b_i\Delta_{x_i^*},\ i=1,2,\dots,n$ összeadandó egyenlő, vagyis $b_i\Delta_{x_i^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{n},\ i=1,2,\dots n$. Akkor a közelítő függvényérték előre adott $\varepsilon > 0$ pontosságát figyelembe véve a függvény közelítő argumentumértékeinek teljesíteniük kell a következő egyenlőtlenséget:

$$\Delta_{x_i^*} \le \frac{\varepsilon}{nb_i},\ i=1,2,\dots,n. \tag{4.6}$$

29. Példa. Az l hosszúságú inga lengésperiódusa $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ képlettel számítható ki, ahol g a nehézségi gyorsulást jelöli. Milyen pontossággal kell megmérni az inga hosszát, ha a lengésperiódusát kell kiszámítani 0.5% relatív hibával, és tudjuk, hogy a periódus megközelítőleg $2\,s$. Hány tizedes pontosságú értéket kell venni a π és g állandókra a képletben?

Megoldás. A feladat szerint $T^*=2\,s$ és $\varepsilon=\delta_{T^*}=0.5\%=\frac{5}{1000}$. A $b_i,\ i=1,2,3$ együtthatókat megkaphatjuk, ha kiszámítjuk a T függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \pi} &= 2\sqrt{\frac{l}{g}}; & b_1 &= \left|\frac{\partial T}{\partial \pi}(\pi^*,l^*,g^*)\right| = 2\sqrt{\frac{l^*}{g^*}};\\
\frac{\partial T}{\partial l} &= \frac{\pi}{\sqrt{l\cdot g}}; & b_2 &= \left|\frac{\partial T}{\partial l}(\pi^*,l^*,g^*)\right| = \frac{\pi^*}{\sqrt{l^*\cdot g^*}};\\
\frac{\partial T}{\partial g} &= -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{q}}; & b_3 &= \left|\frac{\partial T}{\partial g}(\pi^*,l^*,g^*)\right| = \frac{\pi^*\sqrt{l^*}}{g^*\sqrt{q^*}}.
\end{aligned}$$

A 4.5-ös képletet módosítva kiszámíthatjuk a δ_{T^*} relatív hibahatárt:

$$\delta_{T^*}=\frac{\Delta_{T^*}}{|T^*|}=\frac{b_1}{|T^*|}\Delta_{\pi^*}+\frac{b_2}{|T^*|}\Delta_{l^*}+\frac{b_3}{|T^*|}\Delta_{g^*}.$$

Mivel $T^*=2\pi^*\sqrt{\frac{l^*}{g^*}}=2\,s$ és $\delta_{T^*}=\frac{5}{1000}$, a $\frac{b_i}{|T^*|},\ i=1,2,3$ törteket rövidítve a következőt kapjuk:

$$\frac{\Delta_{\pi^*}}{\pi^*}+\frac{\Delta_{l^*}}{2l^*}+\frac{\Delta_{g^*}}{2g^*}=\frac{5}{1000}=\frac{1}{200}.$$

Az egyenlő hozzájárulások elvét alkalmazva megkapjuk, hogy $\frac{b_1}{|T^*|}\Delta_{\pi^*}=\frac{b_2}{|T^*|}\Delta_{l^*}=\frac{b_3}{|T^*|}\Delta_{g^*}=\frac{\delta_{T^*}}{3}$, vagyis

$$\frac{\Delta_{\pi^*}}{\pi^*}=\frac{\Delta_{l^*}}{2l^*}=\frac{\Delta_{g^*}}{2g^*}=\frac{1}{600}.$$

Innen $\Delta_{\pi^*}=\frac{\pi^*}{600}$. Számítsuk ki a π^* értékes pontos számjegyeit: $\delta_{\pi^*}=\frac{\Delta_{\pi^*}}{\pi^*}=\frac{\frac{\pi^*}{600}}{\pi^*}=\frac{1}{600}=0.0017=0.17\cdot10^{-2}<0.5\cdot10^{-2}$. Alkalmazva a értékes pontos számjegyek számának 4.4-es képletét, megkapjuk, hogy $1-n=-2$, vagyis $n=3$. Tehát a képletben a π-t három tizedessel kell venni, vagyis $\pi^*=3.14$. Hasonló módon számíthatjuk ki a g^* nehézségi gyorsulás pontos értékes számjegyeinek számát is: $\Delta_{g^*}=$

$\frac{2g^*}{600}$, vagyis $\delta_{g^*} = \frac{\Delta_{g^*}}{g^*} = \frac{\frac{2g^*}{600}}{g^*} = \frac{1}{300} = 0.0033 = 0.33 \cdot 10^{-2} < 0.5 \cdot 10^{-2}$. Innen $1 - n = -2$, illetve $n = 3$ és a g-t a képletben három tizedessel kell venni, vagyis $g^* = 9.81$.

Határozzuk meg, milyen pontossággal kell mérni az inga hosszúságát, vagyis számítsuk ki a Δ_{l^*}-t. Mivel $T^* = 2$, $\pi^* = 3.14$ és $g^* = 9.81$, az inga közelítő hosszúsága $l^* = \frac{(T^*)^2 g^*}{4(\pi^*)^2} = \frac{4 \cdot 9.81}{4 \cdot 3.14^2} = 0.994$. Innen $\Delta_{l^*} = \frac{2l^*}{600} = \frac{l^*}{300} = \frac{0.994}{300} = 0.0033\, m = 0.3\, cm$, vagyis az inga hosszúságát $0.3\, cm$ pontossággal kell megmérni.

□

4.2 Interpoláció

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző pontok az $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$ intervallumból. Ezeket a pontokat alappontoknak vagy osztópontoknak nevezzük. Úgyszintén adottak az alappontokhoz tartozó $y_1, y_2, \ldots y_n$ függvényértékek. Ezek a pontok különböző pillanatban mért fizikai nagyságok méréseredményei is lehetnek. Az interpoláció alapfeladata egy olyan függvény meghatározása, amely interpolálja a megadott pontokat, vagyis olyan g függvényt keresünk, melyre érvényes a $g(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots$ egyenlőség. Geometriai értelemben olyan g függvényt keresünk, melynek grafikonja átmegy az $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots n$ pontokon.

Attól függően, hogy a g milyen függvényosztályba tartozik, az interpoláció lehet:

- Polinom interpoláció: a g függvény polinom. A függvények approximációjánál sűrűn használatos polinom a Taylor- és a Maclaurin-polinom.
- Trigonometrikus interpoláció: a g függvény trigonometrikus függvény. A Fourier sort sűrűn alkalmazzák az interpolációban.

4.2.1 Lagrange-féle interpolációs polinom

Legyen az interpolációs függvény $g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$ alakú. A polinom $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ együtthatói egyértelműen meghatározzák a polinomot. Ezek az együtthatók meghatározhatók ha az (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ pontokat behelyettesítjük a $g(x)$ polinomba. Így $n + 1$ egyenletből és $n + 1$ ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszert kapunk. Az ismeretlenek a $c_0, c_1, \ldots c_n$ együtthatók.

$$
\begin{aligned}
c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \cdots + c_n x_0^n &= y_0 \\
c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots + c_n x_1^n &= y_1 \\
c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_n x_2^n &= y_2 \\
&\vdots \\
c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \cdots + c_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}
$$

A lineáris egyenletrendszer determinánsát Vandermonde (A.T. Vandermonde (1735-1796)) determinánsnak nevezik. Ez a determináns különbözik nullától, így a lineáris egyenletrendszer határozott, vagyis pontosan egy megoldása van. Innen következik, hogy az $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots n$ pontokon keresztül pontosan egy n-ed fokú polinom grafikonja megy át.

Az n-ed fokú Lagrange-féle interpolációs polinomot $L_n(x)$-el jelöljük és felírható a következő képlet segítségével:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{i=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \end{aligned} \tag{4.7}$$

30. Példa. Az alappontok és a megfelelő függvényértékek adottak a táblázatban. Határozza meg a Lagrange-féle interpolációs polinomot.

x_k	-1	1	2	3
y_k	-2	0	-2	2

Megoldás. Mivel négy alappont adott, így a Lagrange-féle interpolációs polinom harmadfokú lesz. A 4.7-es képlet szerint

$$\begin{aligned} L_3(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ &+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ &= -2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} + 0 - 2\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} + \\ &+ 2\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} = \frac{12x^3-36x^2+24}{12} = x^3-3x^2+2. \end{aligned}$$

□

A Lagrange-féle interpolációs feladatban azt a polinomot kell meghatározni, amely átmegy az adott alappontok és megfelelő függvényértékek által alkotott pontokon keresztül. Gyakran előfordul, hogy az adott függvény nagyon bonyolult, így nehezen számolható ki a függvény értéke az adott pontokban. Ilyenkor ez a függvény approximálható a Lagrange-féle interpolációs polinommal.

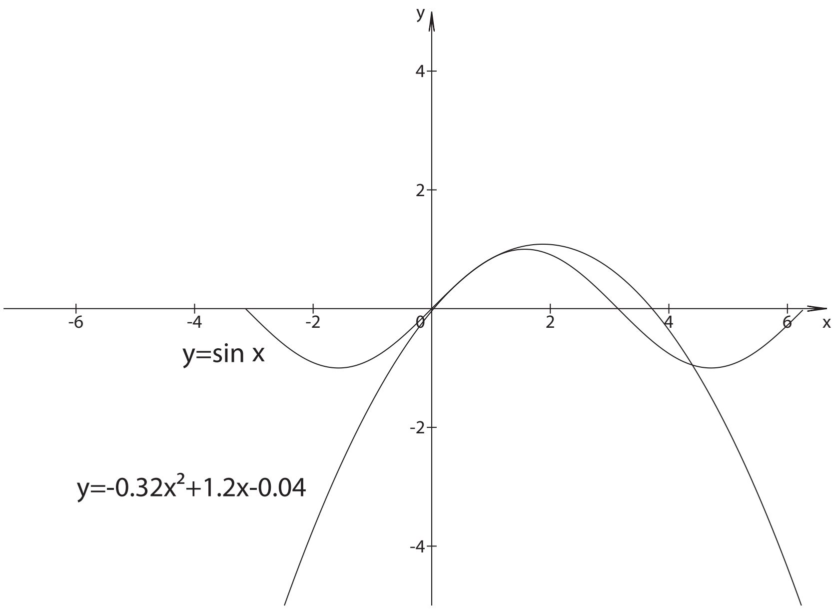
31. Példa. Interpolálja az $f(x) = \sin x$ függvényt a Lagrange-féle interpolációs polinommal az $x_0 = 0.4, x_1 = 0.7$ és $x_2 = 1$ alappontokban.

Megoldás. Az $f(x) = \sin x$ függvény értékei az adott pontokban $y_0 = \sin 0.4 = 0.39$, $y_1 = \sin(0.7) = 0.64$ és $y_2 = \sin 1 = 0.84$. A trigonometrikus függvények értékének kiszámításakor számológép segítségével óvatosan bánjunk a mértékegységekkel, mivel ha nincs kihangsúlyozva a mértékegység, akkor a radiánt vesszük alapértelmezettnek.
Mivel három alappont adott, a másodfokú interpolációs polinomot kell meghatározni. A 4.7-es képlet alap-

ján:

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\
&= 0.39\frac{(x-0.7)(x-1)}{(0.4-0.7)(0.4-1)} + 0.64\frac{(x-0.4)(x-1)}{(0.7-0.4)(0.7-1)} + 0.84\frac{(x-0.4)(x-0.7)}{(1-0.4)(1-0.7)} = \\
&= -0.32x^2 + 1.2x - 0.04.
\end{aligned}
$$

Rajzoljuk le az adott függvényt és a meghatározott interpolációs polinomot egy grafikonra. A grafikont te-



4.2. ábra: Az $f(x) = \sin x$ függvény interpolációja polinommal

kintve megfigyelhetjük, hogy az interpolációs polinom csak az alappontok környezetében approximálja jól a függvényt. A függvény pontosabb approximációjához több alappont illetve magasabb fokú interpolációs polinom szükséges.

□

Az interpolációnál és a többi numerikus módszernél, amelyek közelítő eredményeket adnak fontos tudni, milyen közel vagyunk a pontos eredményhez. Fontos meghatározni, milyen határokban mozog a hiba, amely a numerikus módszer alkalmazásával keletkezett. A következő tétel a Lagrange-féle interpolációs polinommal való approximáció hibáját becsüli fel.

14. Tétel. Legyen az f függvény n-szer folytonosan deriválható az $[a, b]$ intervallumon, és tételezzük fel, hogy létezik az $f^{(n+1)}(x)$ az (a, b) intervallum mindegyik pontjában. Jelölje az $L_n(x)$ az $f(x)$ függvény n-ed fokú Lagrange-féle interpolációs polinomát a páronként különböző $x_i \in [a, b],\ i = 0, 1, 2, \dots, n$ alappontokban. Akkor minden $x \in [a, b]$-re érvényes:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

ahol a $\xi = \xi(x)$ pont az $In(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ intervallumba tartozik. A ξ pont függ az $x, x_0, x_1, \dots x_n$ pontoktól és az f függvénytől.

Megjegyzés: Az $In(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ intervallum olyan legkisebb intervallum, amely tartalmazza az összes $x_i,\ i = 0, 1, 2, \dots n$ alappontokat és az x argumentumot.

4.2.2 Newton-féle interpolációs polinom

Egy függvény interpolálásánál gyakran több különböző fokú interpolációs polinomot kell meghatároznunk, majd kiválasztani a legjobbat. A Lagrange-polinom segítségével a különböző fokú polinomok meghatározását mindig az elejétől kell kezdeni, nem használhatjuk fel az előző polinomok kiszámításánál szerzett információt, így sok aritmetikai műveletet kell elvégeznünk. Ezt a problémát az interpolációs polinom Newton-féle (I. Newton (1643-1727)) alakjának segítségével küszöbölhetjük ki. Az interpolációs polinom Newton-féle alakját felírhatjuk az osztott differenciák segítségével. Az osztott differencia valójában a derivált általánosítása.

27. Definíció. Legyenek $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, \dots, n$ páronként különböző pontok. Az osztott differenciákat a következő módon definiáljuk:

- nulladrendű osztott differenciák: $y[x_i] = y_i,\ i = 0, 1, 2, \dots, n$;
- elsőrendű osztott differenciák: $y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y[x_{i+1}] - y[x_i]}{x_{i+1} - x_i},\ i = 0, 1, 2, \dots, n$;
- k-adrendű osztott differenciák:

$$y[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - y[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

32. Példa. Számítsa ki az $y[x_0, x_1, x_2, x_3]$ osztott differenciát, ha adottak az $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ alappontok és az $y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 9$ függvényértékek.

Megoldás. A definíció szerint $y[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{y[x_1,x_2,x_3] - y[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0}$. A felírt képlet kiszámításához szükséges az alacsonyabb rendű osztott differenciák kiszámítása: $y[x_1, x_2, x_3] = \frac{y[x_2,x_3] - y[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$ és $y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1,x_2] - y[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$. A felírt másodrendű osztott differenciák kiszámításához viszont ki kell számítanunk az elsőrendű osztott differenciákat: $y[x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = 5$, $y[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 3$ és $y[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 1$. Behelyettesítve a kapott értékeket a következőt kapjuk: $y[x_0, x_1, x_2] = 1$ és $y[x_1, x_2, x_3] = 1$. Innen a keresett osztott differencia értéke $y[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0$.

□

Az interpolációs polinom Newton-féle alakját az osztott differenciák segítségével a következő módon definiáljuk.

28. Definíció. Legyenek $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$ páronként különböző pontok. A pontok által meghatározott interpolációs polinom Newton-féle alakját a következő képlet segítségével írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} N_n(x) &= y_0 + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ &+ y[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} y[x_0, x_1, \ldots x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Megjegyzés: bebizonyítható, hogy a páronként egymástól különböző alappontok által meghatározott Lagrange-féle és Newton-féle polinom egyenlő, vagyis $L_n(x) = N_n(x)$.

Az osztott differenciákat gyakran táblázat alakjában ábrázolják, mivel az ilyen ábrázolás praktikusabbá teszi kiszámításukat számítógép nélkül.

x_0	y_0					
x_1	y_1	$y[x_0, x_1]$				
x_2	y_2	$y[x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2]$			
x_3	y_3	$y[x_2, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
x_n	y_n	$y[x_{n-1}, x_n]$	$y[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$y[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\ldots$	$y[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

4.1. táblázat: Osztott differenciák táblázatban

A táblázatban félkövér betűtípussal írt osztott differenciák a Newton-féle interpolációs polinom együtthatói.

33. Példa. Határozza meg azt az interpolációs polinomot a Newton-féle alakban, amely áthalad a $(-1, 6), (0, 1), (2, 3), ($
pontokon.

Megoldás. Mivel négy alappont adott, így az interpolációs polinom harmadfokú lesz. A 4.8 képlet szerint:

$$N_3(x) = y_0 + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + y[x_0, \ldots, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

A képletben megjelenő osztott differenciákat táblázat segítségével számítjuk ki.

$x_0 = -1 \quad y_0 = 6$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 1 \quad y[x_0, x_1] = \frac{1-6}{0+1} = -5$

$x_2 = 2 \quad y_2 = 3 \quad y[x_1, x_2] = \frac{3-1}{2-0} = 1 \quad y[x_0, x_1, x_2] = \frac{1+5}{2+1} = 2$

$x_3 = 5 \quad y_3 = 66 \quad y[x_2, x_3] = \frac{66-3}{5-2} = 21 \quad y[x_1, x_2, x_3] = \frac{21-1}{5-0} = 4 \quad y[x_0, \ldots, x_3] = \frac{4-2}{5+1} = \frac{1}{3}$

Ha behelyettesítjük a kiszámított osztott differenciákat az interpolációs polinom Newton-féle alakjába, megkapjuk a keresett polinomot:

$$N_3(x) = 6 - 5(x + 1) + 2(x + 1)x + \frac{1}{3}(x + 1)x(x - 2) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{11}{3}x + 1.$$

□

4.3 A függvények zérushelyének numerikus meghatározása

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény zérushelyének meghatározásához meg kell oldani az

$$f(x) = 0 \tag{4.9}$$

egyenletet a valós számok halmazán. Minden olyan $\xi \in \mathbb{R}$ valós számot, melyre érvényes az $f(\xi) = 0$ egyenlőség, az egyenlet *megoldásának, gyökének* nevezzük. A 4.9-es egyenletet nem lehet mindig analitikusan megoldani. Ha az $f(x)$ függvény n-ed fokú polinom, a 4.9-es egyenletet n-ed fokú *algebrai* egyenletnek nevezzük. Minden olyan egyenletet, amely nem algebrai, transzcendens egyenletnek nevezzük. Közismert, hogy csak az ötödfokúnál alacsonyabb fokú algebrai egyenleteknek van analitikus megoldása, még az ötnél magasabb fokú algebrai egyenleteknek és a transzcendens egyenleteknek a megoldását általános esetben nem lehet analitikusan meghatározni. Ezért a 4.9-es egyenlet közelítő megoldását keressük valamilyen numerikus módszer segítségével.

A legtöbb numerikus módszer alapötlete a következő:

- az x_0 *kezdő approximáció* meghatározása a *megoldás lokalizációjának* segítségével;
- *iterációs szabály* definiálása, melynek alapján az x_0 kezdő approximációból kiindulva egy $\{x_k\}$ approximációk sorozatát generálunk, amely az adott egyenlet ξ megoldásához konvergál, vagyis $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$.

A numerikus módszereknél nem számíthatjuk ki az $\{x_k\}$ approximációs sorozat mindegyik tagját, mivel végtelen sok van belőlük, ezért fontos meghatározni egy kritériumot, amely megállítja az algoritmust miután elértük a közelítő megoldás kívánt pontosságát. Ezt a kritériumot *megállási feltételnek* nevezzük. Tegyük fel, hogy a ξ pontos megoldás hibakorlátja, vagyis tolerancia értéke $\varepsilon > 0$. Akkor teljesülnie kell a $|x_k - \xi| < \varepsilon$ kritériumnak. Mivel nem tudjuk a ξ pontos megoldás értékét, más megállási feltételeket kell alkalmazni:

1. $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$;
2. $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$;
3. $|f(x_k)| < \varepsilon$.

A felsorolt megállási feltételek közül a továbbiakban az elsőt fogjuk alkalmazni.

Egy numerikus probléma több numerikus módszerrel is megoldható, ez miatt célszerű felbecsülni melyik módszert legjobb alkalmazni. Minden numerikus módszernek van előnye és hátránya. Az egyik fő követelmény az, hogy az $\{x_k\}$ approximációk sorozata minél gyorsabban konvergáljon a ξ pontos megoldás felé. Az iterációk konvergenciájának sebességét *konvergenciasebességnek* nevezik.

29. Definíció. Legyen $\xi \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$. Ha léteznek olyan $p > 1$ és $\eta \geq 0$ állandók, melyekre érvényes az

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \eta |x_k - \xi|^p$$

egyenlőtlenség, azt mondjuk, hogy az $\{x_k\}$ sorozat a ξ felé konvergál legalább p-ed rendű konvergenciasebességgel. Ha $p = 2$, a konvergenciasebesség kvadratikus, ha viszont $p = 3$, a konvergenciasebesség harmadrendű. Ha $\eta \in [0, 1)$ és $p = 1$, akkor a konvergenciasebesség lineáris.

4.3.1 A függvény zérushelyeinek kezdő becslése

Az adott egyenlet megoldásának kezdő becslése alatt azt az eljárást értjük, melynek folyamán meghatározunk egy minél kisebb intervallumot, melybe beletartozik az egyenlet egy vagy több megoldása. Ebből az intervallumból választjuk ki az egyenlet gyökének kezdő approximációját. Az egyenlet gyökét gyakran felbecsülhetjük a megfelelő $f(x)$ *függvény grafikonjának* rajzolásával. A függvény $y = f(x)$ grafikonjának metszéspontjai az x tengellyel az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai. Ha az adott függvény grafikonját nehéz lerajzolni, akkor az ekvivalens $h(x) = g(x)$ egyenletet tekintjük, ahol a h és g megfelelően választott függvény. Két egyenlet ekvivalens a D halmazon, ha az egyik egyenlet megoldása a D halmazon egyben a másik egyenlet megoldása is és fordítva is érvényes. A mi esetünkben a h és g függvények metszetének apszcisszája egyben az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása is.

Az egyenlet gyökét felbecsülhetjük úgy is, hogy abban az intervallumban, ahol várhatóan található a gyök, felveszünk pontokat, kiszámítjuk a függvény értékeit ezekben a pontokban, majd megkeressük az előjelváltási helyeket. Ilyen módon behatároljuk a függvény gyökeit. Ez az eljárás a következő lemmán alapszik.

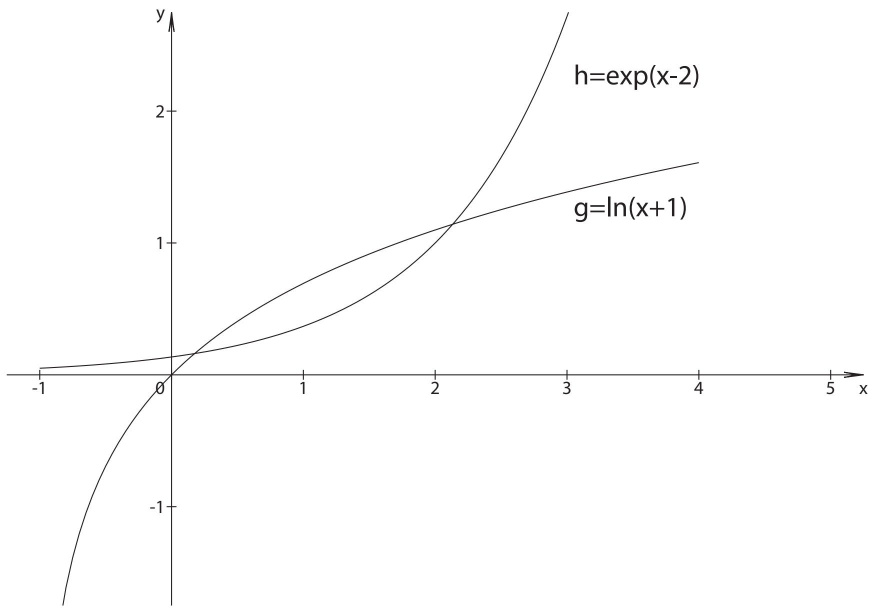
2. Lemma. Legyen az $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon. Ha $f(a)f(b) < 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke van az (a, b) intervallumban.

34. Példa. Becsülje fel az ln $(x + 1) - e^{x-2} = 0$ egyenlet gyökeit

a) grafikus módszerrel;

b) az egyenlet gyökeinek behatárolásával.

Megoldás. a) Rajzoljuk le egy grafikonra a $g(x) =$ ln $(x + 1)$ és a $h(x) = e^{x-2}$ függvényeket. A 4.3-as



4.3. ábra: Grafikus módszer

grafikonról látható, hogy a feladatban adott egyenletnek két gyöke van. Az első a $[0, 0.5]$ intervallumban, még a másik a $[2, 2.5]$ intervallumban található.

□

b) Határoljuk be az egyenlet gyökeit úgy, hogy felveszünk az x változóra értékeket, majd számítsuk ki a függvény értékeit ezekben a pontokban. Ezeket az értékeket az alábbi táblázatban tüntetjük fel.

x	0.10	0.15	0.20	2.10	2.15
$f(x)$	-0.0543	-0.0175	0.0170	0.0262	-0.0144

Alkalmazva az előbbi lemmát a táblázatban feltüntetett értékekre, láthatjuk, hogy a függvény a $(0.15, 0.2)$ intervallumban vált előjelet, ami azt jelenti, hogy ebben az intervallumban található az egyenlet gyöke. Azt is észrevehetjük, hogy a függvény a $(2.1, 2.15)$ intervallumban is előjelet vált, vagyis ebben az intervallumban is van az egyenletnek gyöke.

□

4.3.2 Felezési módszer

A felezési módszer az $f(x) = 0$ egyenlet közelítő megoldását adja meg és a legegyszerűbb módszerek közé tartozik. Tételezzük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és $f(a)f(b) < 0$. Akkor a 2. Lemma szerint az egyenletnek az $[a, b]$ intervallumon legalább egy gyöke van. Ha

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

akkor $\xi = \frac{a+b}{2}$ az egyenlet egyik megoldása. Ha viszont $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, akkor az egyenlet egyik megoldása az

$$\left(a, \frac{a+b}{2}\right), \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

intervallumok egyikében található. Ha $f(a)f(\frac{a+b}{2}) < 0$, az egyenlet gyöke az első intervallumban található, ha viszont $f(a)f(\frac{a+b}{2}) > 0$, a gyök biztosan nem található az első intervallumban, következésképpen a második intervallumban van. Jelölje az $[a_1, b_1]$ azt az új intervallumot, melyben az egyenlet legalább egy gyöke található. Számítsuk ki az f függvény $f(\frac{a_1+b_1}{2})$ értékét az intervallum felezőpontjában. Ha $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, akkor az egyenlet pontos megoldása $\xi = \frac{a_1+b_1}{2}$. Ha viszont $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$, az adott intervallumot elfelezzük és megnézzük, melyik újonnan kapott intervallumban található a függvény legalább egy zérushelye. Ezt az eljárást odáig ismételjük, még nem kapjuk meg az egyenlet pontos megoldását, vagy pedig az egyenlet közelítő megoldását kívánt pontossággal. Ezzel az eljárással meghatározhatjuk az egyenlet pontos gyökét, mint valamelyik intervallum felét, vagy pedig kapunk egy $[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k], \dots$ intervallum sorozatot, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$f(a_k)f(b_k) < 0 \qquad \text{és} \qquad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

A következő tétel az előbb leírt iteratív módszer konvergenciáját bizonyítja, és az általa kapott gyök-approximáció hibáját becsüli fel. Jelölje $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a felezési módszer által kapott gyök-approximációk sorozatát, és legyen $\xi \in [a, b]$ az $f(x) = 0$ egyenlet egy megoldása.

15. Tétel. Legyen az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és tételezzük fel, hogy $f(a)f(b) < 0$. A felezési módszer az $f(x) = 0$ egyenlet egy $\xi \in [a, b]$ gyöke felé konvergál, és érvényes a következő hibabecslés:

$$|x_k - \xi| \leq \frac{|b-a|}{2^k}. \tag{4.10}$$

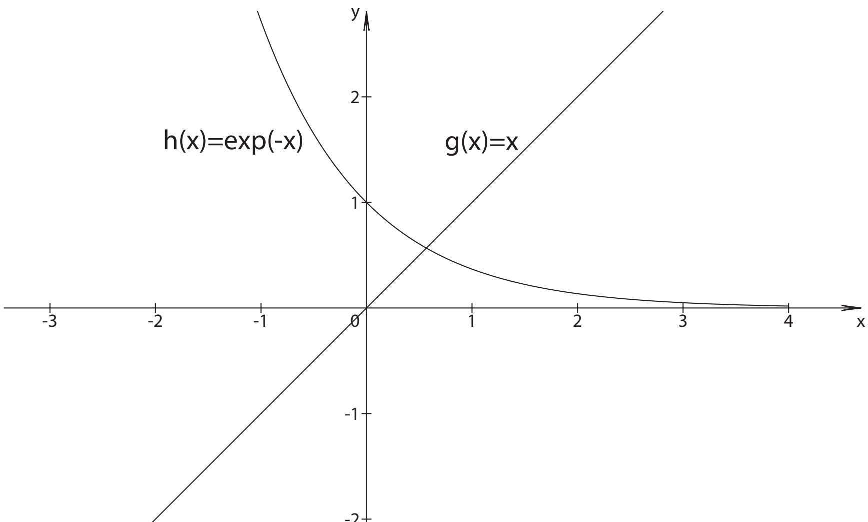
Mivel a numerikus módszerek az egyenlet gyökének közelítő értékét adják meg, szükséges előre megadni a közelítő megoldás $\varepsilon > 0$ toleranciáját, vagyis a hibakorlátját. A numerikus módszer által kapott közelítő megoldásnak eleget kell tennie az $|x_k - \xi| \leq \varepsilon$ megállási feltételnek. A 4.10-es hibabecslésből kifejezhetjük az ε hibakorlát eléréséhez szükséges iterációk számát:

$$k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Bebizonyítható, hogy a felezési módszer konvergenciája lineáris.

35. Példa. A felezési módszerrel határozza meg az $x - e^{-x} = 0$ egyenlet gyökeit $\varepsilon = 10^{-3}$ toleranciával.

Megoldás. Először becsüljük fel grafikus módszerrel az $f(x) = x - e^x$ függvény zérushelyeit. Az $f(x) = x - e^{-x}$ függvény zérushelyei megegyeznek a $h(x) = e^{-x}$ és $g(x) = x$ függvények metszéspontjaival, vagyis az adott egyenlet ekvivalens az $e^{-x} = x$ egyenlettel. A 4.4-es grafikonon látható, hogy az egyenlet



4.4. ábra: Az $x - e^{-x} = 0$ egyenlet gyökének becslése

megoldása az $[a, b] = [0, 1]$ intervallumban van. Ezt a feltevést a $f(a)f(b) = f(0)f(1) = -0.63212 < 0$ függvényértékek szorzatának negatív előjele is alátámasztja. Számoljuk ki, hány iterációra lesz szükségünk az $\varepsilon = 10^{-1}$ pontosság eléréséhez. Mivel $k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$, innen

$$k \geq \log_2 \frac{1-0}{10^{-3}} = \log_2 10^3 = 9.97,$$

vagyis tíz iterációt kell kiszámítanunk. Az intervallumokat, iterációkat és az $f(x_k) = x_k - e^{-x_k}$ függvényértékeket az alábbi táblázatban tüntettük fel.

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	0.0000	1.0000	0.5000	-0.1065	+
1	0.5000	1.0000	0.7500	0.27766	-
2	0.5000	0.7500	0.6250	0.0897	-
3	0.5000	0.6250	0.5625	-0.0073	+
4	0.5625	0.6250	0.5938	0.0416	-
5	0.5625	0.5938	0.5782	0.0173	-
6	0.5625	0.5782	0.5704	0.0051	-
7	0.5625	0.5704	0.5664	-0.0012	+
8	0.5664	0.5704	0.5684	0.0012	-
9	0.5664	0.5684	0.5674	0.0004	-
10	0.5664	0.5674	0.5669	-0.0004	+

A táblázatból látható, hogy a közelítő megoldás $x_{10} = 0.5669$.

□

4.3.3 Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ egyenlet numerikus megoldására szolgáló legismertebb algoritmus a Newton (Newton-Raphson) (J. Raphson (1648-1715)) módszer. A módszer ötlete az, hogy az f függvényt a megoldás közelében egy lineáris függvénnyel approximáljuk. Lineáris függvényként az $f(x)$ görbe érintőjét vesszük az $(x_0, f(x_0))$ pontban, ahol x_0 az egyenlet gyökének kezdő approximációja. Az érintő és az x-tengely x_1 metszete lesz az egyenlet gyökének új approximációja. A következő iterációban új érintőt szerkesztünk az $f(x)$ görbére az $(x_1, f(x_1))$ pontban, majd ismételjük a már említett lépéseket. Ezt a módszert ezért érintőmódszernek is nevezik. A módszert a 4.5-ös ábra mutatja be.

A függvény érintőjének képlete az $(x_0, f(x_0))$ pontban $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Az érintő és az x-tengely metszetét megkapjuk, ha az érintő egyenletébe behelyettesítjük az $y = 0$-át és kifejezzük az x-et.

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

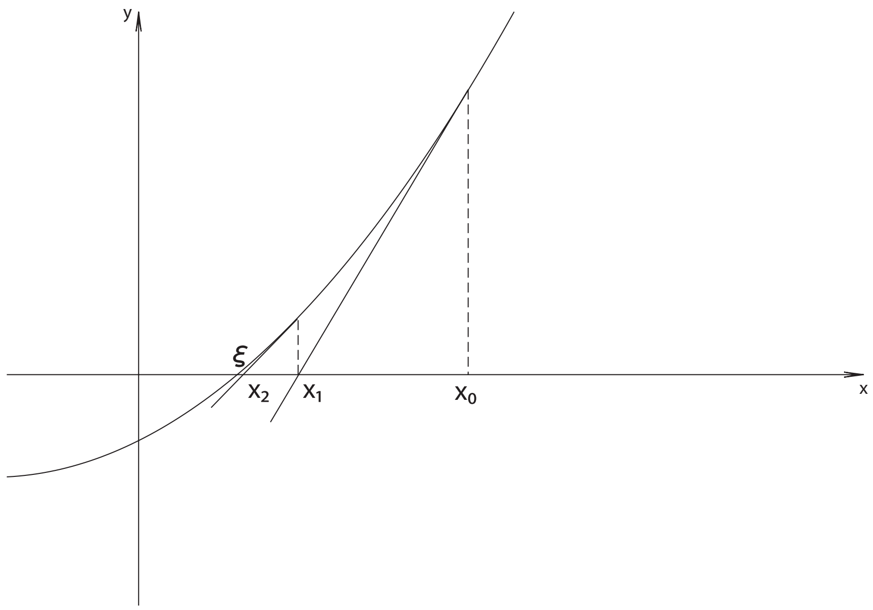
A következő x_1 approximáció az érintő és az x-tengely metszete, vagyis ha $f'(x_0) \neq 0$, akkor kiszámítható a következő képlettel:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Általánosítva az előző képletet, a következő rekurzív sorozatot kapjuk:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \; k = 0, 1, 2, \dots . \tag{4.11}$$

Ezt a képletet nevezzük a Newton-módszer iterációjának. A következő tétel a Newton-módszer konvergenciájának feltételeit adja meg.



4.5. ábra: Newton-módszer

16. Tétel. Legyen az f függvény kétszer folytonosan deriválható az (a, b) intervallumon, és jelölje $\xi \in (a, b)$ az f függvény olyan zérushelyét, melyre érvényes $f'(\xi) \neq 0$. Ekkor a Newton-módszer lokálisan konvergál a ξ-hez.

Ez a tétel kimondja, hogy a Newton-módszer lokálisan konvergens. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet gyökét először fel kell becsülni, vagyis találni egy szűk intervallumot, melyben benne van az egyenlet megoldása. Léteznek globálisan konvergens numerikus módszerek. Ezeknél a módszereknél nem kell gyök becslést végezni, viszont a konvergenciasebességük alacsonyabb rendű. Be lehet bizonyítani, hogy a Newton-módszer konvergenciasebessége kvadratikus.

36. Példa. Határozza meg az $x - e^{-x} = 0$ egyenlet gyökét a Newton-módszerrel $\varepsilon = 10^{-3}$ toleranciával.

Megoldás. Ezt az egyenletet az előző példában megoldottuk a felezési módszerrel. Az egyenlet gyökeit grafikus módszerrel becsültük fel. A megoldás a $[0, 1]$ intervallumban található. Legyen a kezdő approximáció $x_0 = 0$. Mivel a tolerancia $\varepsilon = 10^{-3}$, a megállási feltétel $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-3}$. Ellenőrizzük le a konvergenciára vonatkozó tétel feltételeinek teljesülését. Mivel $f'(x) = 1 + e^{-x}$ és $f''(x) = -e^{-x}$ folytonos függvények és $f'(x) \neq 0$ minden x-re a $[0, 1]$ intervallumból, az előző tétel feltételei teljesülnek, vagyis alkalmazhatjuk a Newton-módszert.

k	x_k	$f(x_k) = x_k - e^{-x_k}$	$f'(x_k) = 1 + e^{-x_k}$	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0	0.0000	-1.0000	2.0000	0.5000
1	0.5000	-0.1065	1.6065	0.5663
2	0.5663	-0.0013	1.5676	0.5671

Mivel $|x_3 - x_2| = |0.5671 - 0.5663| = 0.0008 < 10^{-3}$, az $x_3 = 0.5671$ eleget tesz a megállási feltételnek, vagyis az $x_3 = 0.5671$ lesz az egyenlet közelítő megoldása. Ha összehasonlítjuk a Newton-módszer konvergeciasebességét a felezési módszerével, észrevehetjük, hogy az előbbi sokkal gyorsabban konvergál a megoldás felé.

□

37. Példa. Határozza meg az $2x$—ln x—$4 = 0$ egyenlet gyökét az $[1, 4]$ intervallumon a Newton-módszerrel $\varepsilon = 10^{-3}$ toleranciával.

Megoldás. Mivel adott az intervallum, ahol az egyenlet megoldása megtalálható, nem szükséges a gyök becslése. Ellenőrizzük le vajon eleget tesz-e az egyenlet a Newton-módszer konvergenciájára vonatkozó feltételeknek. Az $f(x) = 2x - \ln x - 4$ függvény kétszer folytonosan deriválható az $[1, 4]$ intervallumon, mivel az $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ és $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ függvények folytonosak az adott intervallumon. Úgyszintén $f'(\xi) \neq 0$, mivel az $f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$ függvénynek a zérushelye az $x = \frac{1}{2}$ pontban van, ami nem tartozik az $[1, 4]$ intervallumba. Az előző tétel szerint alkalmazhatjuk a Newton-módszert. Mivel a közelítő megoldást 10^{-3} pontossággal kell meghatároznunk, az $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-3}$ megállási feltételnek teljesülnie kell. Hogy elérjük ezt a pontosságot, legalább négy tizedes számjeggyel kell számolnunk. A Newton-módszer kezdő iterációjaként tetszőleges számot választhatunk az $[1, 4]$ intervallumból, például $x_0 = 1$-et.

k	x_k	$f(x_k) = 2x_k - \ln x_k - 4$	$f'(x_k) = 2 - \frac{1}{x_k}$	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0	1.0000	-2.0000	1.0000	3.0000
1	3.0000	0.9014	1.6667	2.4592
2	2.4592	0.0185	1.5934	2.4476
3	2.4476	0.0000	1.5914	2.4476

Mivel a megállási feltétel teljesül a negyedik iterációnál, vagyis $|x_{k+1} - x_k| = |2.4476 - 2.4476| = 0 < 10^{-3}$, az egyenlet közelítő gyökének vehetjük a $\xi = 2.4476$ számot.

□

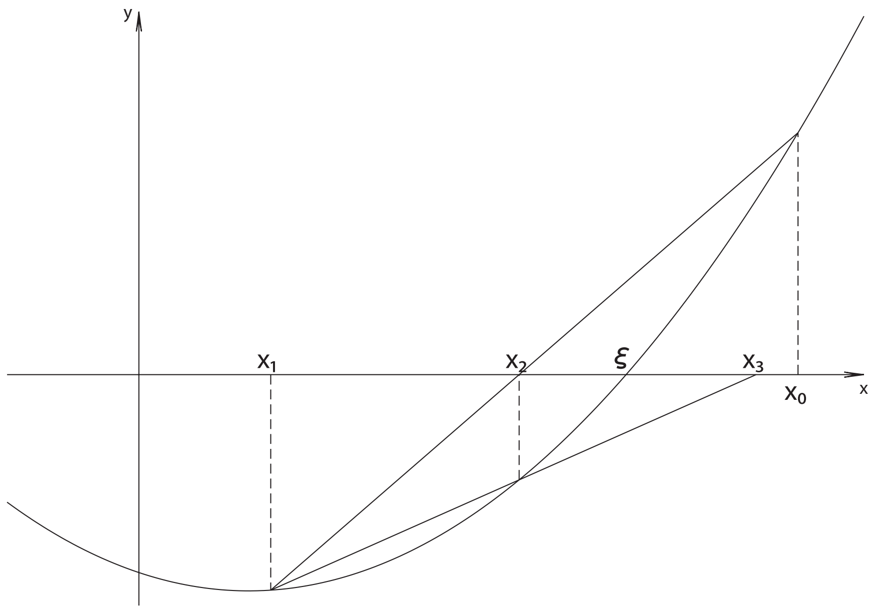
4.3.4 Szelőmódszer

A Newton-módszer minden iterációjában ki kell számítani a függvény első deriváltjának értékét, ami időigényes lehet, ha a függvény bonyolult alakú. A függvény deriváltjának kiszámítását kikerülhetjük a szelőmódszer alkalmazásával. Legyenek x_0 és x_1 az $f(x) = 0$ egyenlet gyökének kezdő approximációi. Tekintsük a függvény szelőjét, mely áthalad az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ ponton. A szelőmódszert a 4.6-os ábra ábrázolja. A szelő és az x-tengely metszetét jelöljük x_2-vel. Az x_3-at az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon áthaladó $f(x)$ függvény szelője és az x-tengely metszeteként kapjuk meg. Ha ilyen módon folytatjuk a megkezdett módszert, egy iteratív sorozatot kapunk, amely az $f(x) = 0$ egyenlet ξ pontos megoldása felé konvergál. Mivel a függvény szelőjének egyenlete adott az $y = f(x_1) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_1)$ képlettel, a metszetét az x-tengellyel kiszámíthatjuk, ha a szelő egyenletébe behelyettesítjük az $y = 0$-át és kifejezzük az x-et:

$$f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x_1 - f(x_1) \right).$$

A kifejezés rendezése után $x = x_1 - \frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} f(x_1)$, és ezt általánosítva a következő iterációs sorozatot kapjuk:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \; k = 1, 2, \dots . \tag{4.12}$$



4.6. ábra: Szelőmódszer

A következő tétel leírja a szükséges feltételeket a szelőmódszer konvergenciájához.

17. Tétel. Legyen az f függvény kétszer folytonosan deriválható az (a, b) intervallumon, és jelölje $\xi \in (a, b)$ az f függvény olyan zérushelyét, melyre érvényes $f'(\xi) \neq 0$. Ekkor a szelőmódszer lokálisan konvergál az $f(x) = 0$ egyenlet gyöke felé.

Megjegyzés: bebizonyítható, hogy a szelőmódszer konvergenciasebessége megközelítőleg 1.618.

38. Példa. Határozza meg az $x - e^{-x} = 0$ egyenlet gyökét a szelőmódszer segítségével $\varepsilon = 10^{-3}$ toleranciával.

Megoldás. Ezt az egyenletet korábban megoldottuk a felezési módszer és a Newton-módszer segítségével. Az egyenlet gyöke a $[0, 1]$ intervallumban található. Kezdő approximációnak az $x_0 = 0$ és $x_1 = 1$ pontokat vesszük. Ellenőrizzük le, teljesülnek-e az előző tétel feltételei, hogy a szelőmódszer által generált sorozat biztosan az adott egyenlet ξ gyöke felé konvergáljon. Mivel $f'(x) = 1 + e^{-x}$ és $f''(x) = -e^{-x}$ folytonos függvények és $f'(x) \neq 0$ minden számra a $[0, 1]$ intervallumból, a tétel feltételei teljesülnek, így alkalmazhatjuk a szelőmódszert. A megállási feltétel $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-3}$.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$
1	0.0000	1.0000	-1.0000	0.6321	0.6127
2	1.0000	0.6127	0.6321	0.0708	0.5638
3	0.6127	0.5638	0.0708	-0.0052	0.5672
4	0.5638	0.5672	-0.0052	0.00004242	0.5671

Mivel $|x_5 - x_4| = |0.5671 - 0.5672| = 0.0001$, a megállási feltétel teljesül, így az egyenlet közelítő megoldása $x_5 = 0.5671$. Ha összehasonlítjuk ezt a módszert a felezési és a Newton-módszerrel, a feladat alapján megállapíthatjuk, hogy a Newton-módszer a leggyorsabb, még a felezési módszer konvergál a leglassabban.

□

4.4 Numerikus integrálás

Tekintsük az $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integrált. Az integrálszámítás alaptétele szerint minden $[a,b]$ intervallumon folytonos függvénynek létezik F primitív függvénye és érvényes, hogy
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Egyes f függvények F primitív függvényének meghatározása nem egyszerű. Sok olyan függvény létezik, melynek primitív függvényét nehéz, néha pedig lehetetlen kiszámítani. Ilyenkor, és amikor a függvény $(x_i, f(x_i)),\ x_i \in [a,b],\ i = 0,1,2,\dots n$ pontokkal adott, a határozott integrált csak közelítőleg lehet meghatározni, vagyis numerikus módszereket kell alkalmazni.

Az egyik numerikus módszer az $f(x)$ integrandus helyett az $f(x)$ függvény $L_n(x)$ interpolációs polinomját tekinti, vagyis az adott függvény helyett a függvény interpolációs polinomját integráljuk. Legyen $n = 1$, vagyis tekintsük a függvény elsőfokú Lagrange-féle interpolációs polinomját. A Lagrange-féle interpolációs polinom 4.7-es képletét alkalmazva az a és b alappontokra a következőt kapjuk:

$$L_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}.$$

Innen

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_a^b L_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{x^2}{2} - bx\right)\Big|_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\Big|_a^b = \\
&= \frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{b^2}{2} - b^2 - \frac{a^2}{2} + ab\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2\right) = \\
&= \frac{f(a)}{a-b}\left(-\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + ab\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - ab\right) = \\
&= \frac{f(a)}{b-a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - ab\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - ab\right) = \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - ab\right)(f(a) + f(b)) = \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\left(b^2 - 2ab + a^2\right)(f(a) + f(b)) \\
&= \frac{(b-a)^2}{2(b-a)}(f(a) + f(b)) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).
\end{aligned}$$

Jelöljük a $h = b - a$-val az a és b pontok távolságát. Akkor az

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \tag{4.13}$$

képletet *kis trapézformulának* nevezzük. A kis trapézformulát akkor alkalmazzuk, ha az $[a,b]$ integrálási intervallum kicsi.

39. Példa. Számítsa ki az $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ integrált a kis trapézformula segítségével.

Megoldás. Ha az $a = 1$, $f(a) = f(1) = \ln 1 = 0$, $b = 2$, $f(b) = \ln 2 = 0.6931$ és $h = b - a = 2 - 1 = 1$ értékeket behelyettesítjük a kis trapézformulába, megkapjuk az integrál közelítő értékét:

$$\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(0 + 0.6931) = 0.34655.$$

□

Ha az integrálási intervallum nagy, a kis trapézformula nem eléggé pontos, így ezt a képletet módosítani kell. Osszuk fel az $[a, b]$ integrálási intervallumot n egyenlő részintervallumra az $x_k = a + kh,\ k = 0, 1, 2, \dots, n$ alappontok segítségével, ahol $h = \frac{b-a}{n}$. Ezeket az alappontokat ekvidisztáns alappontoknak nevezzük, mivel egyenlő h távolságra vannak egymástól. Alkalmazzuk a kis trapézformulát a kapott $[x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, 2, \dots, n$ részintervallumok mindegyikére:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \\ &+ f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).\end{aligned}$$

Innen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right). \tag{4.14}$$

A 4.14-es képletet *nagy trapézformulának* vagy egyszerűen *trapézformulának* nevezzük.

40. Példa. Ossza hat egyenlő részre a $[2, 5]$ intervallumot.

Megoldás. Számítsuk ki az ekvidisztáns alappontokat az $x_k = a + kh,\ k = 0, 1, \dots, n$ képlet segítségével. Mivel az adott intervallumot hat egyenlő részintervallumra kell osztani, így $n = 6$. Legyen $x_0 = a = 2$, $x_6 = b = 5$ és $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$. Az ekvidisztáns alappontok a következő táblázatban adottak:

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0

A keresett részintervallumok felírhatók az ekvidisztáns alappontok segítségével: $[x_k - 1, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, 6$, vagyis $[2, 2.5]$, $[2.5, 3]$, $[3, 3.5]$, $[3.5, 4]$, $[4, 4.5]$ és $[4.5, 5]$.

□

41. Példa. Számítsa ki az $\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ közelítő értékét a trapézképlet segítségével úgy, hogy az integrálási intervallumot felosztja négy egyenlő részre.

Megoldás. A feladat szerint $n = 4$ és $[a, b] = [1, 2]$, így $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$. Számítsuk ki az alappontokat az $x_k = a + kh = 1 + 0.25k,\ k = 1, 2, \dots, 4$ képlet segítségével és a függvényértékeket ezekben a pontokban.

k	0	1	2	3	4
x_k	1.0000	1.2500	1.5000	1.7500	2.0000
$f(x_k)$	0.0000	0.2231	0.4055	0.5596	0.6931

A 4.14-es trapézképlet segítségével kiszámíthatjuk az integrál közelítő értékét:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x &\approx \frac{0.25}{2}\left(f(x_0)+2\sum_{k=1}^{3} f(x_k)+f(x_4)\right)= \\ &= 0.125(0+2(0.2231+0.4055+0.5596)+0.6931)=0.3837.\end{aligned}$$

Az adott határozott integrált kiszámíthatjuk analitikusan is. Számítsuk ki az integrál pontos értékét, és hasonlítsuk össze a kapott közelítő értékkel.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{ll} u=\ln x & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x} & v=x \end{array}\right| = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{d}x = \\ &= 2\ln 2 - \ln 1 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 = 0.3863.\end{aligned}$$

Ha összehasonlítjuk az integrál közelítő értékeit, amit a kis trapézformulával, illetve a trapézformulával határoztunk meg, megállapíthatjuk, hogy a trapézformulával kapott közelítő érték pontosabb, mint a kis trapézformulával kapott közelítő érték.

□

4.5 A differenciálegyenletek numerikus megoldása

A kurzuson belül a Runge-Kutta (C. Runge (1856 - 1927), M.W. Kutta (1867 - 1944)) módszercsaládot említjük. Ez a módszercsalád az

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0)=y_0 \tag{4.15}$$

kezdetiérték probléma közelítő megoldására szolgál a $[t_0, T]$ véges intervallumon. A Runge-Kutta módszercsalád valójában a 4.15 kezdetiérték probléma közelítő megoldását kiszámító numerikus módszerek családja, melyen belül a módszerek főleg a pontosságban különböznek egymástól. Az említett módszercsalád a diszkretizáción alapszik, vagyis az $y(t_i)$ közelítő megoldás értékeit adja meg a $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ pontokban. Ezek a pontok a $[t_0, T]$ intervallumba tartoznak, amelyen keressük az eredményt. A $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ ekvidisztáns pontok, vagyis $t_k = t_0 + kh,\ k = 0, 1, 2, \dots, n$, ahol a két alappont közötti távolság, vagyis a lépésköz $h = \frac{T-t_0}{n}$.

Az $y'(t) = f(t, y(t))$ differenciálegyenletet integrálva t és $t+h$ határok között a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h} y'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_t^{t+h} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s \\ y(t+h)-y(t) &= \int_t^{t+h} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Ha ezt az egyenletet elosztjuk h-val, a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{h}\left(y(t+h)-y(t)\right)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s.$$

A 4.15-ös kezdetiérték probléma közelítő megoldására szolgáló numerikus módszerek ötlete abból áll, hogy a fenti egyenlőség jobb oldalán levő integrált numerikus módszerrel oldjuk meg. Jelölje $f_h(t,y(t))$ a fenti egyenlőség jobb oldali integráljának közelítő megoldására szolgáló numerikus módszer képletét. Akkor érvényes az $\frac{1}{h}\left(y(t+h)-y(t)\right)\approx f_h(t,y(t))$ kifejezés. Legyen $u(t)$ a 4.15-ös kezdetiérték probléma $y(t)$ pontos megoldásának közelítése. Ebben az esetben $\frac{1}{h}\left(u(t+h)-u(t)\right)=f_h(t,u(t))$, vagyis a következő módszert kapjuk:

$$\begin{aligned} u(t+h) &= u(t)+hf_h(t,u), \\ u(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

A Runge-Kutta módszercsaládba tartozó módszerek legismertebbike az ún. klasszikus Runge-Kutta módszer, melynek negyedrendű lokális képlethibája van, ezért ez a módszer negyedrendű. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $u_i=u(t_i),\ i=0,1,2,\dots,n$ jelölést. Akkor a klasszikus Runge-Kutta módszert a következő képletekkel definiálhatjuk:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i+\frac{h}{6}(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}), \\ u(t_0) &= y_0, \\ &\text{ahol} \\ k_1^{(i)} &= f(t_i,u_i), \\ k_2^{(i)} &= f\left(t_i+\frac{h}{2},u_i+\frac{h}{2}k_1^{(i)}\right), \\ k_3^{(i)} &= f\left(t_i+\frac{h}{2},u_i+\frac{h}{2}k_2^{(i)}\right), \\ k_4^{(i)} &= f\left(t_i+h,u_i+hk_3^{(i)}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

42. Példa. Oldja meg az $y'=y-t,\ y(0)=1.5$ kezdetiérték problémát a $t\in[0,1.5]$ intervallumon, ha az intervallumot hat egyenlő részre osztja.

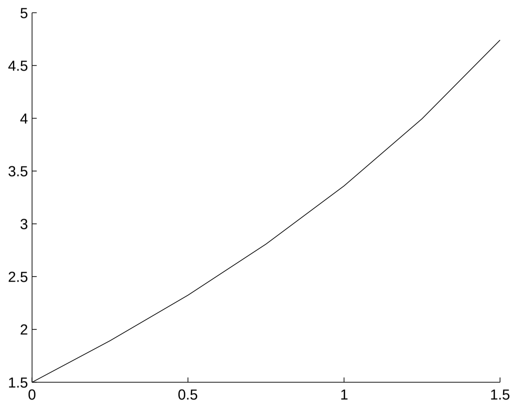
Megoldás. Az adott kezdetiérték probléma helyett tekintsük az $u'=u-t, t_0=0,\ u_0=1.5$ és $T=t_n=1.5$ approximációt. A feladat szövegéből következik, hogy $n=6$. A 4.17-es képletek alapján elkészíthető a 4.7 táblázat, melyben megtalálhatók a kezdetiérték probléma megoldásának közelítő értékei. Összegezve a közelítő értékeket és sűrítve a táblázatot, a következő áttekinthetőbb táblázatot kapjuk:

i	0	1	2	3	4	5	6
t_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
y_i	1.5000	1.8920	2.3243	2.8085	3.3591	3.9951	4.7408

A táblázat alapján lerajzolhatjuk a kezdetiérték probléma megoldásának approximációját:

i	u_i	$t_i = t_0 + ih$	$k_1^{(i)} = f(t_i, u_i)$	$k_2^{(i)} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_1^{(i)}\right)$	$k_3^{(i)} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_2^{(i)}\right)$	$k_4^{(i)} = f\left(t_i + h, u_i + hk_3^{(i)}\right)$	u_{i+1}
0	1.5	0.00	$f(0, 1.5)$ =1.5000	$f(0.125, 1.6875)$ =1.5625	$f(0.125, 1.6953)$ =1.5703	$f(0.25, 1.8926)$ =1.6426	1.8920
1	1.8920	0.25	$f(0.25, 1.8920)$ =1.6420	$f(0.375, 2.0973)$ =1.7223	$f(0.375, 2.1073)$ =1.7323	$f(0.5, 1.8926)$ =1.8251	2.3243
2	2.3243	0.50	$f(0.5, 2.3243)$ =1.8243	$f(0.625, 2.5524)$ =1.9274	$f(0.625, 2.5653)$ =1.9403	$f(0.75, 2.8094)$ =2.0594	2.8085
3	2.8085	0.75	$f(0.75, 2.8085)$ =2.0585	$f(0.875, 3.0658)$ =2.1908	$f(0.875, 3.0823)$ =2.2073	$f(1, 3.3603)$ =2.3603	3.3591
4	3.3591	1.00	$f(1, 3.3591)$ =2.3591	$f(1.125, 3.654)$ =2.529	$f(1.125, 3.6752)$ =2.5502	$f(1.25, 3.9967)$ =2.7467	3.9951
5	3.9951	1.25	$f(1.25, 3.9951)$ =2.7451	$f(1.375, 4.3383)$ =2.9633	$f(1.375, 4.3655)$ =2.9905	$f(1.5, 4.7427)$ =3.2427	4.74085

4.7. ábra: Runge-Kutta módszer



4.8. ábra: A kezdetiérték probléma megoldásának approximációja

□

4.6 Feladatok a numerikus módszerekből

97. Feladat. Határozza meg az abszolút és relatív hibát, illetve az abszolút és relatív hibahatárt, ha

a) $x^* = 1.5$ és $x = 1.48$;

b) $y^* = 5$ és $y = 5.03$.

Megoldás. Az abszolút hibát a $\Delta(x^*) = |x - x^*|$ képlet segítségével, még a relatív hibát a $\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|}$ képlettel határozzuk meg.

a) Az $x^* = 1.5$ abszolút hibája $\Delta(x^*) = |1.48 - 1.5| = 0.02$, a relatív hibája pedig $\delta(x^*) = \frac{0.02}{1.5} = 0.0133 = 1.33\%$. Abszolút és relatív hibahatárnak tekinthetünk minden olyan Δ_{x^*} illetve δ_{x^*} számot, melyre érvényes a $\Delta(x^*) \leq \Delta_{x^*}$ illetve a $\delta(x^*) \leq \delta_{x^*}$ egyenlőtlenség. Abszolút hibahatárnak vegyük a $\Delta_{x^*} = 0.02$ számot, még a relatív hibahatárnak s $\delta_{x^*} = 0.014$ számot vesszük.

◇

b) Az abszolút hiba $\Delta(y^*) = |5 - 5.03| = 0.03$, a relatív hiba pedig $\delta(y^*) = \frac{0.03}{5} = 0.006 = 0.6\%$. Abszolút és relatív hibahatárnak vehetjük a $\Delta_{y^*} = 0.03$ illetve a $\delta_{y^*} = 0.006$ számot.

◇

98. Feladat. Adott az x^* közelítő szám $\delta_{x^*} = 10^{-3}$ relatív hibahatára. Határozza meg azt az intervallumot, melyben az x pontos szám található, ha

a) $x^* = 150$;

b) $x^* = 1500$;

c) $x^* = 900$;

d) $x^* = 90$.

Megoldás. A feladatban kért intervallumot az $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$ és a $x \in [x^* - \Delta_{x^*}, x^* + \Delta_{x^*}]$ képletek segítségével határozzuk meg. Az abszolút hibahatárt a $\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}$ képletből fejezzük ki. Innen $\Delta_{x^*} = \delta_{x^*} \cdot |x^*|$.

a) Ha behelyettesítjük az $x^* = 150$-et a fenti képletekbe, megkapjuk a $\Delta_{x^*} = 150 \cdot 10^{-3} = 0.15$ abszolút határértéket, innen pedig $x \in [150 - 0.15, 150 + 0.15] = [149.85, 150.15]$.

◇

b) Mivel $x^* = 1500$, innen $\Delta_{x^*} = 1500 \cdot 10^{-3} = 1.5$. A keresett intervallum pedig $x \in [1500 - 1.5, 1500 + 1.5] = [1498.5, 1501.5]$.

◇

c) Az $x^* = 900$ közelítő szám abszolút hibahatára $\Delta_{x^*} = 900 \cdot 10^{-3} = 0.9$. Innen $x \in [900 - 0.9, 900 + 0.9] = [899.1, 900.9]$.

◇

d) Az $x^* = 90$ közelítő szám abszolút hibahatára $\Delta_{x^*} = 90 \cdot 10^{-3} = 0.09$. Innen $x \in [90 - 0.09, 90 + 0.09] = [89.91, 90.09]$.

◇

99. Feladat. Határozza meg a közelítő számok értékes pontos számjegyeinek számát, ha adott a közelítő számok hibája.

a) $x^* = 48361$, $\delta(x^*) = 1\%$;

b) $x^* = 14.9360$, $\delta(x^*) = 2\%$;

c) $y^* = 592.8$, $\Delta(y^*) = 5 \cdot 10^{-1}$;

d) $y^* = 25.386$, $\Delta(y^*) = 2 \cdot 10^{-2}$.

Megoldás. A közelítő szám értékes pontos számjegyeinek számát a $\delta(x^*) \leq 0.5 \cdot 10^{1-n}$ egyenlőtlenségből lehet meghatározni. Az n jelöli az értékes pontos számjegyek számát.

a) Mivel $\delta(x^*) = 1\% = 0.01 = 0.1 \cdot 10^{-1} < 0.5 \cdot 10^{-1} = 0.5 \cdot 10^{1-n}$, innen $-1 = 1 - n$, vagyis $n = 2$. Tehát a 48361 számnak 2 értékes pontos számjegye van, mégpedig a 4 és a 8.

◇

b) A $\delta(x^*) = 2\% = 0.02 = 0.2 \cdot 10^{-1} < 0.5 \cdot 10^{-1} = 0.5 \cdot 10^{1-n}$ egyenlőtlenségből a $-1 = 1 - n$ egyenlőséget kapjuk, innen pedig $n = 2$. A 14.9360 számnak két értékes pontos számjegye van: az 1 és a 4.

◇

c) Számítsuk ki a közelítő szám relatív hibáját: $\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|y^*|} = \frac{5 \cdot 10^{-1}}{592.8} = 0.00084$. Innen $\delta(y^*) = 0.84 \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.5 \cdot 101 - n$, vagyis $-2 = 1 - n$. A 592.8 számnak tehát $n = 3$ értékes pontos számjegye van, mégpedig az $5,\ 9$ és 2.

◇

d) A 25.386 közelítő szám relatív hibahatára $\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|y^*|} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{25.386} = 0.0007878$. Mivel érvényes a $\delta(y^*) = 0.7878 \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.5 \cdot 10^{1-n}$ egyenlőtlenség, felírhatjuk a $-2 = 1 - n$ egyenletet. Innen az értékes pontos számjegyek száma $n = 3$, mégpedig a $2,\ 5$ és 3 számjegyek.

◇

100. Feladat. Határozza meg a $x^* = 1.3$ és $y^* = 5$ közelítő számok abszolút és relatív hibáit, ha ismertek az $x = 1.35$ és $y = 5.45$ pontos számok. Számítsa ki a következő függvények abszolút és relatív hibáit:

a) $f(x, y) = 4x + 5y$;

b) $f(y) = \frac{1}{y}$;

c) $f(x) = x^2$;

d) $f(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$.

Megoldás. Először számítsuk ki az adott közelítő számok abszolút hibáját. Mivel $\Delta(x^*) = |1.35 - 1.3| = 0.05$ és $\Delta(y^*) = |5.45 - 5| = 0.45$, abszolút hibahatárnak vehetjük a $\Delta_{x^*} = 0.05$ és $\Delta_{y^*} = 0.45$ számokat. A relatív hibahatárt a következő módon kapjuk meg: $\delta_{x^*} = \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|} = 0.0385$ illetve $\delta_{y^*} = \frac{\Delta(y^*)}{|y^*|} = 0.09$. A kiszámított abszolút és relatív hibahatárok segítségével kiszámíthatjuk az adott függvények abszolút és relatív hibáját.

a) A $\Delta_{f^*} \approx b_1\Delta_{x^*} + b_2\Delta_{y^*}$ képlet segítségével felbecsülhetjük a függvény abszolút hibahatárát. A becslésben szereplő együtthatókat a $b_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\right|$ és $b_2 = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\right|$ képlet segítségével számíthatjuk ki.
Mivel $\frac{\partial f}{\partial x} = 4$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = 5$, innen $b_1 = 4$ és $b_2 = 5$. A függvény abszolút hibahatára $\Delta_{f^*} \approx 4 \cdot 0.05 + 5 \cdot 0.45 = 2.45$. Mivel $f^* = f(x^*, y^*) = 4x^* + 5y^* = 4 \cdot 1.3 + 5 \cdot 5 = 25.2$, a függvény relatív hibahatára $\delta_{f^*} \approx \frac{2.45}{25.2} = 0.0972$.

◇

b) Mivel az adott függvénynek egy független változója van, a függvény hibahatárát a $\Delta_{f^*} \approx b_1\Delta_{y^*}$ becslés segítségével határozzuk meg, ahol $b_1 = |f'(y^*)|$. A függvény első deriváltja $f'(y) = -\frac{1}{y^2}$, innen pedig $b_1 = |-\frac{1}{5^2}| = \frac{1}{25}$. A függvény abszolút hibahatárának becslése $\Delta_{f^*} \approx \frac{1}{25} \cdot 0.45 = 0.018$. Számítsuk ki a függvény közelítő értékét az y^*-ban: $f^* = f(y^*) = \frac{1}{5}$. Innen a relatív hibahatár becslése $\delta_{f^*} \approx \frac{0.018}{0.2} = 0.09$.

◇

c) Mivel a függvény első deriváltja $f'(x) = 2x$, innen $b_1 = f'(x^*) = 2.6$. A függvény abszolút hibahatárának becslése $\Delta_{f^*} \approx b_1\Delta_{x^*} = 2.6 \cdot 0.05 = 0.13$. A függvény közelítő értéke az x^*-ban $f(x^*) = 1.3^2 = 1.69$. Innen a relatív hibahatár becslése $\delta_{f^*} \approx \frac{0.13}{1.69} = 0.0769$.

◇

d) Határozzuk meg először a függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2y(x+y) - 2xy}{(x+y)^2} = \frac{2y^2}{(x+y)^2}; \Rightarrow b_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\right| = \frac{2 \cdot 5^2}{(1.3+5)^2} = 1.2598 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x(x+y) - 2xy}{(x+y)^2} = \frac{2x^2}{(x+y)^2}; \Rightarrow b_2 = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\right| = \frac{2 \cdot 1.3^2}{(1.3+5)^2} = 0.0852.
\end{aligned}$$

Innen a függvény abszolút hibahatárának becslése $\Delta_{f^*} \approx b_1\Delta_{x^*} + b_2\Delta_{y^*} = 1.2598 \cdot 0.05 + 0.0852 \cdot 0.45 = 0.1013$. A függvény közelítő értéke az (x^*, y^*) pontban $f(x^*, y^*) = \frac{2 \cdot 1.3 \cdot 5}{1.3+5} = 2.0635$. Ezt felhasználva megkapjuk a függvény relatív hibahatárának becslését: $\delta_{f^*} \approx \frac{0.1013}{2.0635} = 0.0491$.

◇

101. Feladat. Határozza meg az x^* közelítő szám és az $y = \cos x \cdot e^{10x^2}$ függvény abszolút és relatív hibáját, ha $x = 2 \pm 10^{-6}$.

Megoldás. Mivel $x = 2 \pm 10^{-6}$, $x^* = 2$ és $\Delta_{x^*} = 10^{-6}$, $\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} = \frac{10^{-6}}{2} = 0.0000005 = 5 \cdot 10^{-7}$. A függvény deriváltja $y' = -\sin x \cdot e^{10x^2} + 20x \cos xe^{10x^2}$. Mivel a függvény deriváltjában megjelenik egy trigonometrikus függvény, a b_1 együttható kiszámításánál a számológép segítségével vigyázni kell a mértékegységre. Ha nincs kihangsúlyozva, a trigonometrikus függvények argumentuma mindig radiánban van megadva. Az együttható értéke tehát $b_1 = y'(x^*) = |-\sin 2 \cdot e^{10\cdot 2^2} + 20 \cdot 2 \cos xe^{10\cdot 2^2}| = 4.1322 \cdot 10^{18}$, innen pedig $\Delta_{f^*} \approx b_1 \Delta_{x^*} = 4.1322 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-6} = 4.1322 \cdot 10^{12}$. Mivel $f^* = f(x^*) = -9.7955 \cdot 10^{16}$, a függvény relatív hibahatára $\delta_{f^*} \approx \frac{4.1322\cdot 10^{12}}{9.7955\cdot 10^{16}} = 0.0237 = 2.37\%$.

◇

102. Feladat. Milyen pontossággal kell megmérni a csonkakúp bázisainak sugarát és alkotóját, illetve hány tizedes számjeggyel kell venni a π állandót, hogy a csonkakúp palástjának területét 1%-os pontossággal számíthassuk ki. Az alkotó közelítő értéke $s \approx 5\,m$, míg a bázisok sugarainak közelítő értéke $R \approx 2\,m$ és $r \approx 1\,m$. A csonkakúp palástjának területét a $P = \pi s(R + r)$ képlet segítségével számítjuk ki.

Megoldás. A feladatot az egyenlő hozzájárulások elvével oldjuk meg. Ennél az elvnél feltételezzük, hogy $b_i \Delta_{x_i^*} = \frac{\Delta_y^*}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Az elv szintén feltételezi, hogy az abszolút hibahatár kisebb az adott ε hibánál, vagyis $\Delta_{x_i^*} \le \frac{\varepsilon}{nb_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
A feladatból a következő adatokat használjuk fel: $s^* = 5\,m$, $R^* = 2\,m$ és $\varepsilon = \delta_{P^*} = 1\% = \frac{1}{100}$. Számoljuk ki a a palást területének közelítő értékét: $P^* = \pi^* s^*(R^* + r^*) = \pi^* \cdot 5(2 + 1) = 15\pi^*$. A b_1, b_2, b_3 és b_4 együtthatókat a P függvény elsőrendű parciális deriváltjai segítségével határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial \pi} &= s(R+r); &\Rightarrow\quad & b_1 = \left|\frac{\partial P}{\partial \pi}(\pi^*, s^*, R^*, r^*)\right| = 15;\\
\frac{\partial P}{\partial s} &= \pi(R+r); &\Rightarrow\quad & b_2 = \left|\frac{\partial P}{\partial s}(\pi^*, s^*, R^*, r^*)\right| = 3\pi^*;\\
\frac{\partial P}{\partial R} &= \frac{\partial P}{\partial r} = \pi s; &\Rightarrow\quad & \left|\frac{\partial P}{\partial R}(\pi^*, s^*, R^*, r^*)\right| = \left|\frac{\partial P}{\partial r}(\pi^*, s^*, R^*, r^*)\right| = 5\pi^*.
\end{aligned}$$

Az egyenlő hozzájárulások elve szerint

$$\Delta_{P^*} = b_1 \Delta_{\pi^*} + b_2 \Delta_{s^*} + b_3 \Delta_{R^*} + b_4 \Delta_{r^*},$$

és mivel ismert a relatív hibahatár, a fenti egyenlőséget elosztjuk $|P^*| = 15\pi^*$-vel.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_{P^*}}{|P^*|} &= \frac{b_1}{|P^*|}\Delta_{\pi^*} + \frac{b_2}{|P^*|}\Delta_{s^*} + \frac{b_3}{|P^*|}\Delta_{R^*} + \frac{b_4}{|P^*|}\Delta_{r^*} =\\
&= \frac{15}{15\pi^*}\Delta_{\pi^*} + \frac{3\pi^*}{15\pi^*}\Delta_{s^*} + \frac{5\pi^*}{15\pi^*}\Delta_{R^*} + \frac{5\pi^*}{15\pi^*}\Delta_{r^*} =\\
&= \frac{\Delta_{\pi^*}}{\pi^*} + \frac{\Delta_{s^*}}{5} + \frac{\Delta_{R^*}}{3} + \frac{\Delta r^*}{3}.
\end{aligned}$$

Mivel az egyenlő hozzájárulások elve szerint érvényesek a

$$\frac{\delta_{P^*}}{4} = \frac{b_1}{|P^*|}\Delta_{\pi^*} = \frac{b_2}{|P^*|}\Delta_{s^*} = \frac{b_3}{|P^*|}\Delta_{R^*} = \frac{b_4}{|P^*|}\Delta_{r^*},$$

egyenlőségek, kiszámíthatjuk, hogy

$$\frac{\Delta_{\pi^*}}{\pi^*} = \frac{\Delta_{s^*}}{5} = \frac{\Delta_{R^*}}{3} = \frac{\Delta r^*}{3} = \frac{1}{400}.$$

Innen:

- $\delta_{\pi^*} = \frac{1}{400} = 0.0025 = 0.25 \cdot 10^{-2} < 0.5 \cdot 101 - n$, vagyis az értékes pontos számjegyek számát a $-2 = 1 - n$ egyenletből határozhatjuk meg. Az egyenletből $n = 3$, vagyis a π állandót három tizedes számjeggyel kell venni: $\pi^* = 3.14$.
- A $\frac{\Delta_{s^*}}{5} = \frac{1}{400}$-ból következik, hogy $\Delta_{s^*} = \frac{5}{400} = \frac{1}{80} = 0.0125$, vagyis az alkotó hosszát $0.0125\,m = 1.25\,cm$ pontossággal kell megmérni.
- A $\frac{\Delta_{R^*}}{3} = \frac{\Delta r^*}{3} = \frac{1}{400}$-ból $\Delta_{R^*} = \Delta r^* = \frac{3}{400} = 0.0075$. Innen követezik, hogy az R és r sugarakat $0.0075\,m = 0.75\,cm = 7.5\,mm$ pontossággal kell megmérni.

◇

103. Feladat. Határozza meg a táblázattal megadott függvények Lagrange-féle interpolációs polinomját.

a)

x_k	-1	0	3	5
y_k	1	-1	5	2

b)

x_k	-2	1	2	4
y_k	25	-8	-15	-23

c)

x_k	0	1	2	3	4
y_k	1	4	15	40	85

d)

x_k	0.1	0.5	1.2
y_k	1.25	0.15	-1.20

Megoldás. Ha a 4.7 képletbe behelyettesítjük az adott alappontokat, megkapjuk a keresett polinomot.

a) Mivel az adott függvénynek négy alappontja van, a Lagrange-féle interpolációs polinom harmadfokú lesz.

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
&+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\
&= 1\cdot\frac{x(x-3)(x-5)}{-1(-1-3)(-1-5)} - 1\cdot\frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{1\cdot(-3)(-5)} + \\
&+ 5\cdot\frac{(x+1)x(x-5)}{(3+1)\cdot 3\cdot(3-5)} + 2\cdot\frac{(x+1)x(x-3)}{(5+1)\cdot 5\cdot(5-3)} = \\
&= -\frac{17}{60}x^3 + \frac{47}{30}x^2 - \frac{3}{20}x - 1.
\end{aligned}$$

◇

b) Mivel ennek a függvénynek is négy alappontja van, a Lagrange-féle interpolációs polinom harmadfokú lesz. A polinomot megkapjuk az előbbi feladatban használt képlet segítségével.

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 25\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} - 8\frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} - \\ &- 15\frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} - 23\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)} = \\ &= x^2 - 10x + 1. \end{aligned}$$

◇

c) A feladatban öt alappont adott, így a Lagrange-féle polinom negyedfokú lesz. A polinomot a következő képlet segítségével határozzuk meg:

$$\begin{aligned} L_4(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + \\ &+ y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \\ &+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \\ &+ y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \\ &+ y_4\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \\ &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{-1(-2)(-3)(-4)} + 4\frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{1(1-2)(1-3)(1-4)} + \\ &+ 15\frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{2(2-1)(2-3)(2-4)} + 40\frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{3(3-1)(3-2)(3-4)} + \\ &+ 85\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4(4-1)(4-2)(4-3)} = x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

◇

d) A függvénynek három alappontja van, így a keresett interpolációs poinom másodfokú lesz.

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= 1.25\frac{(x-0.5)(x-1.2)}{(0.1-0.5)(0.1-1.2)} + 0.15\frac{(x-0.1)(x-1.2)}{0.5-0.1)(0.5-1.2)} - \\ &- 1.2\frac{(x-0.1)(x-0.5)}{(1.2-0.1)(1.2-0.5)} = 0.74x^2 - 3.19x + 1.56. \end{aligned}$$

◇

104. Feladat. Határozza meg a $\log_2 x$ függvény interpolációs polinomját, ha adottak az $1,\ 2,\ 4,$ és 8 alappontok. A kapott polinom segítségével számítsa ki a $\log_2 3$ és $\log_2 10$ közelítő értékét.

Megoldás. Először számítsuk ki a függvény értékét az alappontokban. A számítást a $\log_2 2^b = b$ képlet segítségével végezhetjük el. A számítási eredmények a következő táblázatban láthatók:

x_k	1	2	4	8
$y_k = \log_2 x_k$	0	1	2	3

Mivel négy alappontunk van, a függvény Lagrange-féle interpolációs polinomja harmadfokú lesz.

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
&+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\
&= 0\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} + 1\frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} + \\
&+ 2\frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} + 3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)} = \\
&= \frac{1}{56}x^3 - \frac{7}{24}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{31}{21}.
\end{aligned}$$

A $\log_2 3$ értékét megkapjuk, ha a kapott interpolációs polinomba behelyettesítjük a függvény argumentumát:

$$\log_2 3 \approx L_3(3) = 1.62.$$

Ha összehasonlítjuk a kapott közelítő értéket a logaritmus $\log_2 3 = 1.59$ pontos értékével, megállapíthatjuk, hogy a meghatározott interpolációs polinom jól approximálja az adott logaritmus függvényt.
Hasonló módon határozzuk meg a $\log_2 10$ közelítő értékét:

$$\log_2 10 \approx L_3(10) = 6.19.$$

Ha a kapott közelítő értéket összehasonlítjuk a logaritmus $\log_2 10 = 3.32$ pontos értékével, megállapíthatjuk, hogy a Lagrange-féle interpolációs polinom az adott függvényt csak az $[1, 8]$ intervallumban approximálja jól. Ebbe az intervallumba tartoznak az adott alappontok. Ha az alappontokat tartalmazó intervallumon kívül szeretnénk meghatározni a függvény értékeit, ezt az extrapoláció segítségével tehetjük meg. Az extrapoláció által kapott eredmények gyakran tévesek lehetnek, ezért bizonyos fentartással kell őket fogadni.

◇

105. Feladat. Határozza meg az $y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ osztott differenciát, ha adottak a következő pontok:

x_k	1	2	3	4	5	6
y_k	3	10	15	12	9	5

Megoldás. A keresett osztott differenciát táblázat segítségével haározzuk meg. Az osztott differencia kiszámításához a következő képleteket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} y[x_i] &= y_i; \\ y[x_i, x_{i+1}] &= \frac{y[x_{i+1}] - y[x_i]}{x_{i+1} - x_i}; \\ y[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - y[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \; i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

$y_0 = 3$

$y_1 = 10 \quad y[x_0, x_1] = 7$

$y_2 = 15 \quad y[x_1, x_2] = 5 \quad y[x_0, x_1, x_2] = -1$

$y_3 = 12 \quad y[x_2, x_3] = -3 \quad y[x_1, x_2, x_3] = -4 \quad y[x_0, \dots, x_3] = -1$

$y_4 = 9 \quad y[x_3, x_4] = -3 \quad y[x_2, x_3, x_4] = 0 \quad y[x_1, \dots, x_4] = \frac{4}{3} \quad y[x_0, \dots, x_4] = \frac{7}{12}$

$y_5 = 5 \quad y[x_4, x_5] = -4 \quad y[x_3, x_4, x_5] = -\frac{1}{2} \quad y[x_2, \dots x_5] = -\frac{1}{6} \quad y[x_1, \dots x_5] = -\frac{3}{8}$

A táblázatból kiszámíthatjuk a keresett osztott differenciát:

$$y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{y[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_0} = \frac{-\frac{3}{8} - \frac{7}{12}}{6 - 1} = \frac{-23}{120}.$$

◇

106. Feladat. Határozza meg a 103. Feladat-ban felsorolt táblázattal adott függvények Newton-féle interpolációs polinomját.

Megoldás. A Newton-féle interpolációs polinomot az osztott differenciák segítségével határozzuk meg. Az osztott differenciákat a fenti képletek segítségével számítjuk ki és táblázatban tüntetjük fel őket.

a) Az osztott differenciák táblázata:

i	x_i	y_i	$y[x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	-1	1			
1	0	-1	-2		
2	3	5	2	1	
3	5	2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{17}{60}$

Az interpolációs polinomot felírhatjuk a táblázat átlós elemeinek segítségével.

$$N_3(x) = 1 - 2(x+1) + (x+1)x - \frac{17}{60}(x+1)x(x-3) = -\frac{17}{60}x^3 + \frac{47}{30}x^2 - \frac{3}{20}x - 1.$$

◇

b) A feladatot hasonló módon oldjuk meg, mint az előző feladatot. Az osztott differenciák táblázata:

i	x_i	y_i	$y[x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	-2	25			
1	1	-8	-11		
2	2	-15	-7	1	
3	4	-23	-4	1	0

Innen a Newton-féle interpolációs polinom:

$$N_3(x) = 25 - 11(x+2) + (x+2)(x-1) = x^2 - 10x + 1.$$

◇

c) Mivel a feladatban öt alappont adott, a Newton-féle interpolációs polinom negyedfokú lesz. Az osztott differenciák táblázata felírható a következő módon:

i	x_i	y_i	$y[x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-4}, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	1				
1	1	4	3			
2	2	15	11	4		
3	3	40	25	7	1	
4	4	85	45	10	1	0

Mivel a táblázatban az utolsó együttható 0, az interpolációs polinom harmadfokú, nem negyedfokú lesz.

$$N_4(x) = 1 + 3x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-2) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

◇

d) Az interpolációs polinom másodfokú lesz. Az osztott differenciákat a következő táblázatban tüntettük fel:

i	x_i	y_i	$y[x_{i-1}, x_i]$	$y[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0.1	1.25		
1	0.5	0.15	-2.75	
2	1.2	-1.2	-1.93	0.75

Innen a Newton-féle interpolációs polinom:

$$N_2(x) = 1.25 - 2.75(x - 0.1) + 0.75(x - 0.1)(x - 0.5) = 0.75x^2 - 3.19x + 1.56.$$

Ha összehasonlítjuk a kapott Newton-féle interpolációs polinomokat a Lagrange-féle interpolációs polinomokkal a 103. Feladat-ban, bebizonyosodhatunk arról, hogy egyformák, vagyis csak az interpolációs polinom meghatározásának módszerében különböznek.

◇

107. Feladat. Becsülje fel az adott egyenletek gyökeit a lokalizációs módszer segítségével, majd a felezési módszerrel oldja meg őket $\varepsilon = 0.01$ pontossággal.

a) $x^3 - x + 1 = 0$;

b) $x^3 - 4x - 1 = 0$;

c) $x^4 + 0.5x - 1.55 = 0$;

d) $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Megoldás. A lokalizációs módszer segítségével meghatározhatjuk azt az intervallumot, amelybe beletartoznak az egyenlet gyökei. A behatárolási módszer alapötlete azon a lemmán alapszik, amely kimondja, hogy ha érvényes $f(a)f(b) < 0$, akkor az (a, b) intervallumon a függvény előjelet vált, vagyis legalább egy zérushelye van. A felezési módszer is ezen a lemmán alapszik. A felbecsült kezdő intervallumot elfelezzük, és az újonnan kapott két intervallum közül azt tekintjük tovább, amelyben a függvény előjelet vált, vagyis teljesül az előbb említett lemma. Az ε pontosságot a k-dik iterációban érjük el, ahol $k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$.

a) Legyen $f(x) = x^3 - x + 1$. Tételezzük fel, hogy a függvény zérushelye az $x = -1.5$ környezetében található. Alkalmazzuk a behatárolási módszert a függvényre az $x = -1.5$ pont környezetében.

x	-1.6	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2
$f(x)$	-1.496	-0.875	-0.344	0.103	3.928

Mivel $f(-1.4)f(-1.3) < 0$, a függvény zérushelye a $(-1.4, -1.3)$ intervallumban található. Számítsuk ki, hány iterációra lesz szükségünk a kívánt pontosság eléréséhez.

$$k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \log_2 \frac{-1.3 - (-1.4)}{0.01} = \log_2 \frac{0.1}{0.01} = \log_2 10 = 3.32,$$

vagyis, a szükséges iterációk száma $k = 4$.

A felezési módszer által kapott eredményeket a következő táblázatba foglaljuk össze.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	-1.4000	-1.3000	-1.3500	-0.1104	+
1	-1.3500	-1.3000	-1.3250	-0.0012	+
2	-1.3250	-1.3000	-1.3125	0.0515	-
3	-1.3250	-1.3125	-1.3188	0.0253	-
4	-1.3250	-1.3188	-1.3219	0.0121	-

Innen az egyenlet közelítő megoldása $x_4 = -1.3219$. Mivel a zérushely pontossága $\varepsilon = 0.01$, így a megoldást elég két tizedes számjegyig tekinteni, vagyis $x \approx -1.32$.

$\diamond$

b) Legyen $f(x) = x^3 - 4x - 1$. Mivel $f(-2) = -1$, $f(-1) = 2$ és $f(1) = -4$, a zérushelyek behatárolását ezen pontok környezetében végezzük el. A behatárolás lépésköze 0.5 lesz.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	-1.0	1.625	2.0	0.875	-1.0	-2.875	-4.0	-3.625	-1.0	4.625

A táblázatból láthatjuk, hogy a függvény háromszor vált előjelet, vagyis három zérushelye van. Ezek a zérushelyek az $x_1 \in (-2, -1.5)$, $x_2 \in (-0.5, 0)$ és $x_3 \in (2, 2.5)$ intervallumokban találhatók. Mivel három zérushelyünk van, háromszor fogjuk alkalmazni a felezési módszert a lokalizáció által meghatározott intervallumokra. Határozzuk meg az adott pontosság eléréséhez szükséges iterációk számát.

$$k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \log_2 \frac{-1.5-(-2)}{0.01} = \log_2 \frac{0.5}{0.01} = \log_2 50 = 5.64,$$

vagyis $k = 6$. Mivel mindegyik intervallum hossza $b - a = 0.5$, mindegyik intervallumra elég lesz hat iterációt kiszámítani az adott pontosság eléréséhez.

- Határozzuk meg először az $x_1 \in (-2, -1.5)$ intervallumba tartozó zérushelyet.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	-2.0000	-1.5000	-1.7500	0.6406	-
1	-2.0000	-1.7500	-1.8750	-0.0918	+
2	-1.8750	-1.7500	-1.8125	0.2956	-
3	-1.8750	-1.8125	-1.8438	0.1073	-
4	-1.8750	-1.8438	-1.8594	0.0090	-
5	-1.8750	-1.8594	-1.8672	-0.0411	+
6	-1.8672	-1.8594	-1.8633	-0.0160	+

Innen $x_1 \approx -1.86$.

- Alkalmazzuk a felezési módszert a $(-0.5, 0)$ intervallumra.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	-0.5000	0.0000	-0.2500	-0.0156	-
1	-0.5000	-0.2500	-0.3750	0.4473	+
2	-0.3750	-0.2500	-0.3125	0.2195	+
3	-0.3125	-0.2500	-0.2812	0.1028	+
4	-0.2812	-0.2500	-0.2656	0.0438	+
5	-0.2656	-0.2500	-0.2578	0.0141	+
6	-0.2578	-0.2500	-0.2539	-0.0007	-

Az egyenlet egyik megoldásának közelítő értéke $x_2 \approx -0.25$.

- A $(2, 2.5)$ intervallumra alkalmazzuk a felezési módszert a következő táblázatban.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	2.0000	2.5000	2.2500	1.3906	-
1	2.0000	2.2500	2.1250	0.0957	-
2	2.0000	2.1250	2.0625	-0.4763	+
3	2.0625	2.1250	2.0938	-0.1964	+
4	2.0938	2.1250	2.1094	-0.0519	+
5	2.1094	2.1250	2.1172	0.0215	-
6	2.1094	2.1172	2.1133	-0.0153	+

A táblázatból látszik, hogy az egyenlet megoldásának közelítő értéke $x_3 \approx 2.11$.

◇

c) Legyen $f(x) = x^4 + 0.5x - 1.55$. A függvény zérushelyeinek behatárolását a következő táblázatban szemléltetjük.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	13.45	2.76	-1.05	-1.74	-1.55	-1.24	-0.05	4.26	15.45

A táblázatból látszik, hogy a függvény kétszer vált előjelet, mégpedig a $(-1.5, -1)$ és $(1, 1.5)$ intervallumokon. Ebből következik, hogy az egyenlet gyökei is ezekben az intervallumokban találhatók. Az adott pontosság eléréséhez szükséges iterációk száma

$$k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \log_2 \frac{-1-(-1.5)}{0.01} = \log_2 \frac{0.5}{0.01} = \log_2 50 = 5.64,$$

vagyis $k = 6$.

- Tekintsük a először a $(-1.5, -1)$ intervallumot. Alkalmazzuk a felezési módszert erre az intervallumra.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	-1.5000	-1.0000	-1.2500	0.2664	+
1	-1.2500	-1.0000	-1.1250	-0.5107	-
2	-1.2500	-1.1250	-1.1875	-0.1552	-
3	-1.2500	-1.1875	-1.2188	0.0469	+
4	-1.2188	-1.1875	-1.2031	-0.0563	-
5	-1.2188	-1.2031	-1.2110	-0.0052	-
6	-1.2188	-1.2110	-1.2149	0.0207	+

A táblázatból látszik, hogy az egyenlet gyökének közelítő értéke $x_1 \approx -1.21$.

- Az egyenlet második gyökének meghatározásához a felezési módszert alkalmazzuk az $(1, 1.5)$ intervallumon.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	1.0000	1.5000	1.2500	1.5164	-
1	1.0000	1.2500	1.1250	0.6143	-
2	1.0000	1.1250	1.0625	0.2557	-
3	1.0000	1.0625	1.0313	0.0966	-
4	1.0000	1.0313	1.0156	0.0218	-
5	1.0000	1.0156	1.0078	-0.0145	+
6	1.0078	1.0156	1.0117	0.0036	-

Innen $x_2 \approx 1.01$.

$\diamond$

d) Tekintsük az $f(x) = x^3 - 2x - 5$ függvényt. A függvény zérushelyeinek lokalizálásához alkalmazzuk a behatárolási módszert az $(1, 3)$ intervallumon 0.5 lépésközzel.

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	-6.000	-4.625	-1.000	5.625	16.000

A táblázatból láthatjuk, hogy az egyenlet gyöke a $(2, 2.5)$ intervallumban található. A felezési módszer iterációinak számát a következő módon számítjuk ki:

$$k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \log_2 \frac{2.5-2}{0.01} = \log_2 \frac{0.5}{0.01} = \log_2 50 = 5.64,$$

vagyis $k = 6$. A felezési módszert alkamazva erre az intervallumra megkapjuk az egyenlet gyökének közelítő értékét.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(a_k)f(x_k)$
0	2.0000	2.5000	2.2500	1.8906	-
1	2.0000	2.2500	2.1250	0.3457	-
2	2.0000	2.1250	2.0625	-0.3513	+
3	2.0625	2.1250	2.0938	-0.0089	+
4	2.0938	2.1250	2.1094	0.1668	-
5	2.0938	2.1094	2.1016	0.0786	-
6	2.0938	2.1016	2.0977	0.0347	-

A táblázatból láthatjuk, hogy a gyök közelítő értéke $x \approx 2.09$.

◇

108. Feladat. Grafikus módszerrel lokalizálja az egyenletek gyökeit, majd Newton-módszerrel oldja meg őket. A megállási feltétel legyen $\varepsilon = 10^{-2}$.

a) $x^3 - 2x - 5 = 0$;

b) $2x + \ln x - 4 = 0$;

c) $2^x = 4x$;

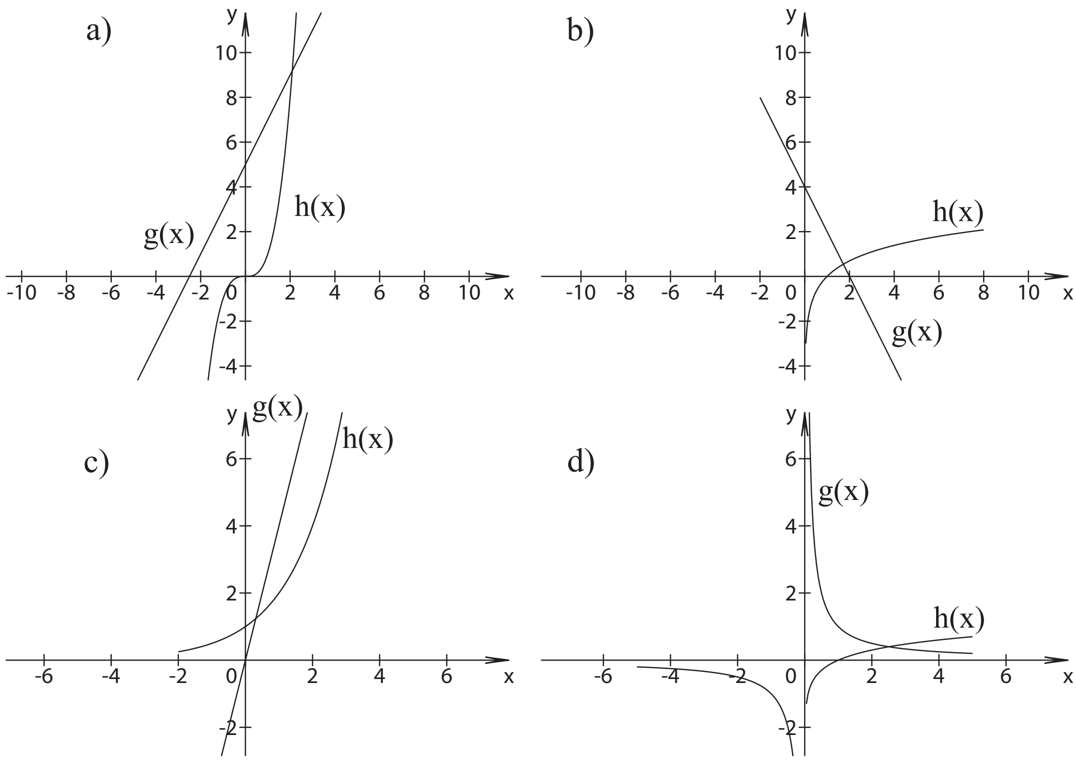
d) $\log x = \frac{1}{x}$.

Megoldás. Mivel az adott függvények bonyolultak, nehéz őket lerajzolni. Ez miatt két egyszerűbb függvény alakjában írjuk fel őket. Az így kapott két függvény metszete lesz az eredeti függvény zérushelye. Mivel a függvények grafikus ábrája legtöbbször nem elég pontos, így a két függvény metszetét a függvény zérushelyének kezdeti, vagyis lokalizált értékeként kezeljük. Az így kapott közelítést használjuk a Newton-módszer kezdeti approximációjaként. A Newton-módszer megállási feltétele az $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ egyenlőtlenséggel adott, ami azt jelenti, hogy a pillanatnyi és az előző iterációban kapott gyök-approximáció különbségének kisebb kell lennie 0.01-nél. A Newton-módszer iterációja az $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ képlettel adott.

A 4.9 ábrán az adott függvények ábrái láthatók.

a) Legyen $f(x) = x^3 - 2x - 5$. A függvény első deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 2$. Írjuk fel az $f(x)$ függvényt $h(x) = x^3$ és $g(x) = 2x + 5$ segítségével. Ezeket a függvényeket könnyen lerajzolhatjuk, a 4.9 ábrán láthatjuk őket. A grafikonról leolvashatjuk, hogy az egyenlet gyöke az $(1, 2.5)$ intervallumban található. Vegyük az intervallumba tartozó $x_0 = 1$ pontot a Newton-módszer kezdő approximációjaként. A Newton-módszer által kapott eredmények a következő táblázatban láthatók.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_{k+1} - x_k\|$
0	1.0000	-6.0000	1.0000	7.0000	6.0000
1	7.0000	324.0000	145.0000	4.7655	2.2345
2	4.7655	93.6950	66.1300	3.3487	1.4100
3	3.3487	25.8540	31.6410	2.5316	0.9000
4	2.5316	6.1618	17.2270	2.1739	0.4000
5	2.1739	0.9259	12.1780	2.0979	0.0080
6	2.0979	0.0373	11.2030	2.0946	0.0033



4.9. ábra: Az egyenlet gyökének lokalizációja grafikus módszerrel

Mivel $|x_7 - x_6| = 0.0033 < 0.01$, a megállási feltétel teljesül, így az egyenlet gyökének közelítő értéke $x \approx 2.09$.

◇

b) Legyen $f(x) = 2x + \ln x - 4$. A függvény deriváltja $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Írjuk fel az $f(x)$ függvényt $h(x) = \ln x$ és $g(x) = -2x + 4$ függvények segítségével. A függvények grafikonjáról leolvashatjuk, hogy a metszetük az $(1, 3)$ intervallumba esik. A Newton-módszer kezdő approximációjaként vegyük az $x_0 = 1$ pontot. A Newton-módszer alkalmazásával a következő táblázatot kapjuk.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	1.0000	-2.0000	1.0000	1.6667	0.6667
1	1.6667	-0.1558	2.6000	1.7266	0.0599
2	1.7266	-0.0006	2.5792	1.7269	0.0002

Mivel $|x_3 - x_2| = 0.0002 < 0.01$, a megállási feltétel teljesül, így a második iteráció után megállhatunk. Az egyenlet gyökének közelítő értéke $x \approx 1.73$.

◇

c) Jelölje $f(x) = 2^x - 4x$ azt függvényt, melynek a zérushelyeit keressük. A függvény deriváltja $f'(x) = 2^x \ln 2 - 4$. Írjuk fel az $f(x)$ függvényt a $h(x) = 2^x$ és a $g(x) = 4x$ függvényekkel. A függvények grafikonjait tekintve láthatjuk, hogy az eredeti függvény zérushelye a $(0,1)$ intervallumban található. A Newton-módszer kezdő approximációjaként választhatjuk az intervallum tetszőleges pontját, pl. $x_0 = 0$. Ezzel a kezdőponttal a Newton-módszer a következő eredményeket adja.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0.0000	1.0000	-3.3069	0.3024	0.3024
1	0.3024	0.0236	-3.1452	0.3099	0.0070

Mivel a megállási feltétel teljesül, a Newton-módszer már az első iterációban megáll. Az adott egyenlet gyöke $x \approx 0.31$.

◇

d) Jelölje $f(x) = \log x - \frac{1}{x}$ azt a függvényt, melynek a zérushelyeit keressük. A függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Az $f(x)$ függvényt felírhatjuk a $h(x) = \log x$ és a $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények segítségével. A függvények grafikonjairól látható, hogy a két függvény metszete az $(1,3)$ intervallumban található. A Newton-módszer kezdőpontjának egy pontot választunk az előbbi intervallumból, pl. $x_0 = 1$. Akkor a következő táblázatot kapjuk.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000
1	1.5000	-0.4906	1.1111	1.9415	0.4415
2	1.9415	-0.2269	0.7804	2.2323	0.2908
3	2.2323	-0.0992	0.6486	2.3853	0.1529
4	2.3853	-0.0417	0.5950	2.4554	0.0701
5	2.4554	-0.0172	0.5731	2.4853	0.0299
6	2.4853	-0.0069	0.5643	2.4977	0.0124
7	2.4977	-0.0028	0.5607	2.5027	0.0050

Mivel a megállási feltétel teljesül, az adott egyenlet gyökének közelítő értéke $x \approx 2.50$.

◇

109. Feladat. Grafikus módszerrel lokalizálja az egyenletek gyökeit, majd a szelőmódszer segítségével oldja meg őket. A megállási feltétel $\varepsilon = 0.01$.

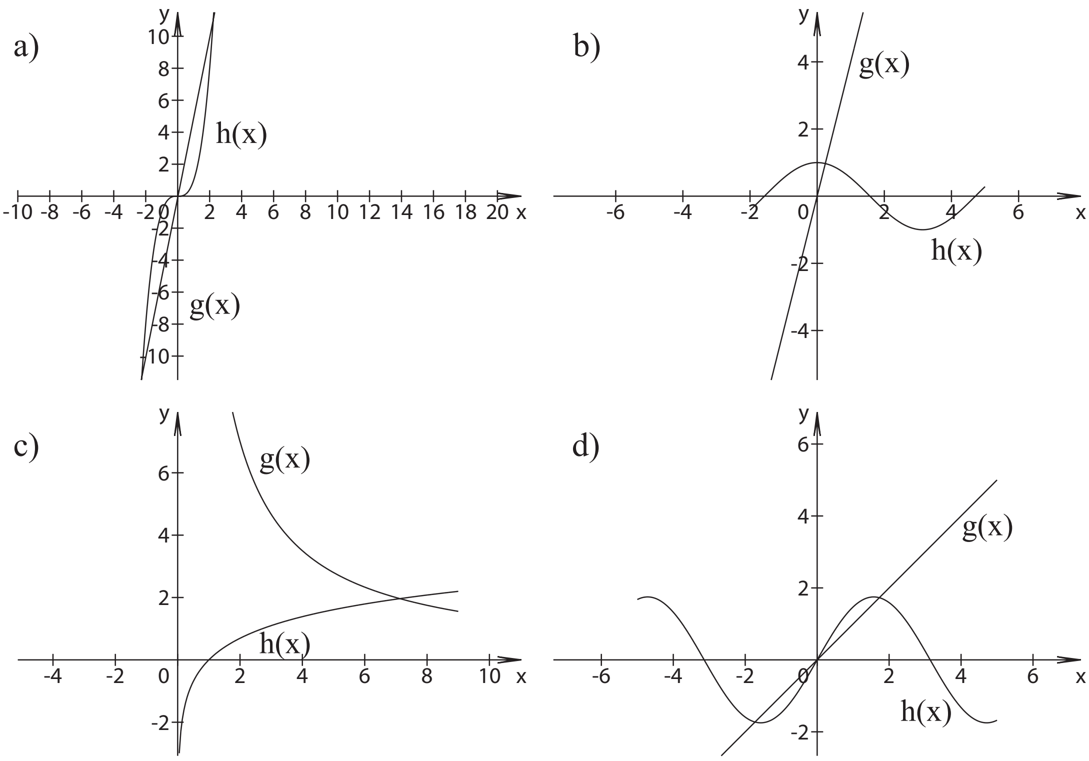
a) $x^3 - 5x + 0.1 = 0$;

b) $4x = \cos x$;

c) $x \ln x - 14 = 0$;

d) $4x - 7 \sin x = 0$.

Megoldás. Az egyenletek gyökeinek grafikus módszerrel való lokalizációja ugyanúgy történik, mint az előző feladatnál. A függvények grafikonjai a 4.10 ábrán láthatók. A szelőmódszer megállási feltétele ugyanaz, mint a Newton-módszernél. Ahhoz, hogy a szelőmódszer elérje a megfelelő pontosságot, az $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell. Ez a módszer egy sorozatot hoz létre az $x_{k+1} = x_k -$



4.10. ábra: Lokalizacija rešenja jednačina grafičkom metodom

$\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$ képlet segítségével. Az így kapott sorozat az adott egyenlet gyöke felé konvergál. A előbbi képletből látszik, hogy a sorozat következő tagjának kiszámításához felhasználjuk a sorozat előző két tagját.

a) Legyen $f(x) = x^3 - 5x + 0.1$ a függvény, melynek a zérushelyeit keressük és bontsuk fel ezt a függvény két egyszerűbb függvenyre, amelyeket könnyen le tudunk rajzolni. Legyenek ezek a függvények $h(x) = x^3$ és $g(x) = 5x - 0.1$. A függvények grafikonja a 4.10 ábrán látható. Észrevehetjük, hogy a két függvény grafikonja három pontban metszi egymást, vagyis az adott egyenletnek három valós gyöke lesz. Az első metszet a $(-5, -1.5)$ intervallumban, a második a $(-0.5, 0.5)$ intervallumban és a harmadik az $(1.5, 5)$ intervallumban található. Mivel a szelőmódszer két kezdőpontot követel, mi az intervallum bal és jobb szélét vesszük kezdő approximációként. Az egyenlet gyökeit külön-külön határozzuk meg a szelőmódszert alkalmazva.

- Jelölje x_1 az egyenlet gyökét, amely a $(-5, -1.5)$ intervallumban található. Kezdő approximációnak vegyük a $x_0 = -5$ és $x_1 = -1.5$ pontokat. A szelőmódszer által kapott eredményeket a következő táblázatban foglaltuk össze.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	-5.0000	-1.5000	-99.9000	4.2250	-1.6420	3.5000
2	-1.5000	-1.6420	4.2250	3.8828	-3.2537	0.1420
3	-1.6420	-3.2537	3.8828	-18.0760	-1.9270	1.6116
4	-3.2537	-1.9270	-18.0760	2.5795	-2.0927	1.3267
5	-1.9270	-2.0927	2.5795	1.3990	-2.2890	0.1657
6	-2.0927	-2.2890	1.3990	-0.4484	-2.2414	0.1964
7	-2.2890	-2.2414	-0.4484	0.0469	-2.2459	0.0477

Mivel $|x_8 - x_7| = | -2.2459 - (-2.2414)| = 0.0045$, a megállási feltétel teljesül, így a szelőmódszer megállhat. Az egyenlet első gyökének közelítő értéke $x_1 \approx -2.25$.

- Jelölje x_2 az egyenlet második gyökét, amely a $(-0.5, 0.5)$ intervallumban van. A szelőmódszert a következő táblázatban tűntettük fel.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	-0.5000	0.5000	2.4750	-2.2750	0.6420	3.5000
2	0.5000	0.0211	-2.2750	-0.0053	0.0199	0.4790

Mivel $|x_3 - x_2| = |0.0199 - 0.0211| = 0.0011$, a megállási feltétel teljesül, így a szelőmódszert leállíthatjuk, mivel elértük a kívánt pontosságot. Az egyenlet gyökének közelítő értéke $x_2 \approx 0.0199$. Ha összehasonlítjuk az x_1 és az x_2 meghatározásának folyamatát a szelőmódszer segítségével, észrevehetjük, hogy az adott pontosság eléréséhez az x_1 meghatározásánál több iterációt kell kiszámítanunk. Ennek az oka az, hogy a megoldást előzőleg nem lokalizáltuk elég jól. Erről az is tanúskodik, hogy a $(-0.5, 0.5)$ intervallum kisebb, mint a $(-5, -1.5)$.

- Tekintsük most az $(1.5, 5)$ intervallumot, ahol az egyenlet utolsó gyöke található. Kezdőpontokként az intervallum bal és jobb szélét vesszük. A szelőmódszert a következő táblázatban foglaltuk össze.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	1.5000	5.0000	-4.0250	100.1000	1.6353	3.5000
2	5.0000	1.6353	100.1000	-3.7034	1.7553	3.3647
3	1.6353	1.7553	-3.7034	-3.2681	2.6567	0.1200
4	1.7553	2.6567	-3.2681	5.5671	2.0887	0.9013
5	2.6567	2.0887	5.5671	-1.2309	2.1916	0.5679
6	2.0887	2.1916	-1.2309	-0.3318	2.2295	0.1028
7	2.1916	2.2995	-0.3318	0.0348	2.2259	0.0379

Mivel $|x_8 - x_7| = |2.2259 - 2.2295| = 0.0036$, a megállási feltétel teljesül. Az egyenlet megoldásának közelítő értéke az adott intervallumban $x_3 \approx 2.2259$.

◇

b) Legyen az $f(x) = 4x - \cos x$ az a függvény, melynek keressük a zérushelyeit. Jelölje $h(x) = \cos x$ és $g(x) = 4x$ azokat a függvényeket, amelyek metszete megegyezik az $f(x)$ függvény zérushelyével. A grafikonról leolvashatjuk, hogy a két függvény metszete a $(0, 1)$ intervallumban található. A szelőmódszer kezdő approximációinak a 0 és az 1 pontot vesszük. A szelőmódszer eredményeit a következő táblázatban foglaltuk össze.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	0.0000	1.0000	-1.0000	3.4597	0.2242	1.0000
2	1.0000	0.2242	3.4597	-0.0780	0.2413	0.7758
3	0.2242	0.2413	-0.0780	-0.0056	0.2427	0.0171

Mivel $|x_4 - x_3| = |0.2427 - 0.2413| = 0.0013$, a megállási feltétel teljesül, így megállhatunk a szelőmódszerrel. Az egyenlet gyökének közelítő értéke $x \approx 0.2427$.

◇

c) Jelölje $f(x) = x \ln x - 14$ azt a függvényt, melynek keressük a zérushelyeit. A $h(x) = \ln x$ és $g(x) = \frac{14}{x}$ függvények metszete megegyezik az $f(x)$ függvény zérushelyével. Az 4.10 ábrán láthatjuk, hogy a metszet az $(1, 10)$ intervallumba van. Ebben az intervallumban található az adott egyenlet gyöke is. Kezdő approximációként az intervallum széleit vesszük, vagyis az 1-et és a 10-et. A szelőmódszer a következő táblázatban foglalható össze.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	1.0000	10.0000	-14.0000	9.0259	6.4721	9.0000
2	10.0000	6.4721	9.0259	-1.9133	7.0892	3.5279
3	6.4721	7.0892	-1.9133	-0.1154	7.1288	0.6170
4	7.0892	7.1288	-0.1154	0.0019	7.1281	0.0396

A negyedik iterációban a szelőmódszert megállíthatjuk, mivel teljesül a kívánt pontosság: $|x_5 - x_4| = |7.1281 - 7.1288| = 0.0006$. Az egyenlet gyökének közelítő értéke $x \approx 7.13$.

◇

d) Legyen $f(x) = 4x - 7 \sin x$ az a függvény, melynek keressük a zérushelyeit. A $h(x) = \frac{7}{4} \sin x$ és $g(x) = x$ függvények metszéspontjai ugyanazokban a pontokban találhatók, ahol az adott egyenlet gyökei. A függvények grafikonjai a 4.10 ábrán láthatók. Láthatjuk, hogy az egyenletnek három gyöke van a $(-3, -1)$, $(-0.5, 0.5)$ és $(1, 3)$ intervallumokban. Mindegyik intervallumra külön alkalmazzuk a szelőmódszert.

- Tekintsük először a $(-3, -1)$ intervallumot. Kezdő approximációként az intervallum széleit, vagyis a -3 és -1 pontokat vesszük. A szelőmódszer eredményeit a következő táblázatban foglaltuk össze.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_k - x_{k-1}\|$
1	-3.0000	-1.0000	-11.0120	1.8903	-1.3930	2.0000
2	-1.0000	-1.2930	1.8903	1.5596	-2.6749	0.2930
3	-1.2930	-2.6749	1.5596	-7.5503	-1.5296	1.3819
4	-2.6749	-1.5296	-7.5503	0.8757	-1.7417	1.1453
5	-1.5296	-1.6486	0.8757	0.3843	-1.7417	0.1190
6	-1.6486	-1.7417	0.8757	-0.0689	-1.7276	0.0931
7	-1.7417	-1.7276	-0.0689	0.0039	-1.7283	0.0142

Mivel $|x_8 - x_7| = |-1.7283 - (-1.7276)| = 0.0008$, a megállási kritérium teljesül, így a hetedik iteráció után megállhatunk. Az egyenlet gyökének közelítő értéke $x_1 \approx -1.7283$.

- A szelőmódszer kezdő approximációinak a $(-0.5, 0.5)$ intervallum széleit vesszük. Az eredményeket a következő táblázatban foglaltuk össze.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_k - x_{k-1}\|$
1	-0.5000	0.5000	1.3560	-1.3560	0.0000	1.0000
2	0.5000	0.0000	-1.3560	0.0000	0.0000	0.0000

Mivel $|x_3 - x_2| = 0$, a megállási feltétel teljesül, így az algoritmust leállíthatjuk. Az $x_2 = 0$ pont az egyenlet gyökének közelítő értéke a $(-0.5, 0.5)$ intervallumon.

- Keressük meg az egyenlet utolsó gyökét, amely az $(1, 3)$ intervallumban található. A szelőmódszer kezdőpontjainak az intervallum széleit vesszük. Az iterációkat a következő táblázatban tüntettük fel.

k	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_k - x_{k-1}\|$
1	1.0000	3.0000	-1.8903	11.0120	1.2930	2.0000
2	3.0000	1.2930	11.0220	-1.5596	1.5048	1.7070
3	1.2930	1.5048	-1.5596	-0.9656	1.8491	0.2118
4	1.5048	1.8491	-0.9656	0.6655	1.7086	0.3443
5	1.8491	1.7086	0.6655	-0.0993	1.7268	0.1405
6	1.7086	1.7268	-0.0993	-0.0077	1.7284	0.0182

Mivel $|x_8 - x_7| = |1.7284 - 1.7268| = 0.0015$, a megállási feltétel teljesül, így leállíthatjuk az algoritmust. Az egyenlet $(1, 3)$ intervallumba eső gyökének közelítő értéke $x_3 \approx 1.7284$.

◇

110. Feladat. Számítsa ki a következő határozott integrálokat a kis trapézformula segítségével.

a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$;

b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_1^2 x \log x\,\mathrm{d}x$.

Megoldás. A határozott integrál közelítő értékének kiszámítására szolgáló kis trapézformula $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$, ahol $h = b - a$.

a) Mivel $a=0$, $b=1$ és $h=b-a=1-0=1$, az integrál közelítő értéke

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

◇

b) Ahogy az előző feladatban is, $a=0,\ b=1$ i $h=1$. Innen

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 0}{0}+\frac{\sin 1}{1}\right)=\frac{1}{2}(1+\sin 1)=\frac{1}{2}(1+0.84)=0.92.$$

Hogy ezt az eredményt megkapjuk, felhasználtuk a $\frac{\sin 0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ jól ismert határértéket és a $\sin 1$ értékét radiánokban tekintettük.

◇

c) Ebben a feladatban $a=1,\ b=2$ és $h=b-a=1$. Innen

$$\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 1}{1}+\frac{\cos 2}{2}\right)=0.17.$$

◇

d) Ahogy az előző feladatban, itt is $a=1,\ b=2$ és $h=1$. Innen

$$\int_1^2 x\log x\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(\log 1+2\log 2)=\log 2=0.30.$$

◇

111. Feladat. Ossza a $[-3,2]$ intervallumot tíz egyenlő részre.

Megoldás. A feladatból $n=10$, $a=-3$ és $b=2$. Innen $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-(-3)}{10}=\frac{5}{10}=0.5$. Az $x_k=a+k\cdot h,\ k=0,1,2,\ldots 10$ képletet alkalmazva a következőt kapjuk:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0

A táblázatból felírhatjuk a keresett intervallumokat: $[-3,-2.5],\ [-2.5,-2],\ [-2,-1.5],$ $[-1.5,-1],\ [-1,-0.5],\ [-0.5,0]$, $[0,0.5],\ [0.5,1],\ [1,1.5],\ [1.5,2]$.

◇

112. Feladat. Számítsa ki a következő határozott integrálokat a trapézformula segítségével úgy, hogy az integrálási intervallumot öt egyenlő részre osztja.

a) $\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Megoldás. A határozott integrál közelítő értékét a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right)$$

trapézformula segítségével határozhatjuk meg.

a) Mivel $n = 5$, $a = 1,\ b = 2$ és $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$, az integrál közelítő értéke

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{logx}{x}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{0.2}{2}\left(\frac{\log 1}{1} + 2\frac{\log 1.2}{1.2} + 2\frac{\log 1.4}{1.4} + 2\frac{\log 1.6}{1.6} + 2\frac{\log 1.8}{1.8} + \frac{\log 2}{2}\right) = \\ &= 0.103.\end{aligned}$$

◇

b) A feladatból látszik, hogy $a = 0,\ b = \pi$, to je $h = \frac{\pi}{5}$. Innen

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{\pi}{10}\left(\frac{\sin 0}{0} + 2\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}} + 2\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{5}} + 2\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\frac{3\pi}{5}} + 2\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\frac{4\pi}{5}} + \frac{\sin\pi}{\pi}\right) = \\ &= 1.8414.\end{aligned}$$

◇

c) Mivel $a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$ i $h = \frac{\pi}{10}$, az integrál közelítő értéke

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{\pi}{20}\Big(\frac{\cos 0}{2} + 2\frac{\cos\frac{\pi}{10}}{1+\frac{\pi}{10}} + 2\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{1+\frac{\pi}{5}} + 2\frac{\cos\frac{3\pi}{10}}{1+\frac{3\pi}{10}} + 2\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{1+\frac{2\pi}{5}} + \\ &+ \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1+\frac{\pi}{2}}\Big) = 0.68.\end{aligned}$$

◇

d) Láthatjuk, hogy $a = 0,\ b = 1$ és $n = 5$, vagyis $h = \frac{1}{5}$. Innen

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{10}\left(e^0 + 2e^{-0.2^2} + 2e^{-0.4^2} + 2e^{-0.6^2} + 2e^{-0.8^2} + e^{-1}\right) = 0.74.$$

◇

113. Feladat. Runge-Kutta módszerrel közelítőleg oldja meg a következő kezdetiérték problémákat az adott intervallumokon öt egyenlő részre osztva őket

a) $y' = y - x,\ y(0) = 1.5, x \in [0,2]$;

b) $y' = 2y - 3,\ y(0) = 1, x \in [0,1]$;

c) $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0, x \in [0,1]$;

d) $y' = \frac{y}{x} - y^2,\ y(1) = 1, x \in [1,2]$.

Megoldás. Legyen $h = \frac{b-a}{n}$, ahol $[a,b]$ az intervallum, amelyben keressük a kezdetiérték probléma megoldását és jelölje n az $[a,b]$ intervallumot felosztó részintervallumok számát. Ezen kívül legyenek $x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,\dots,n$ ekvidisztáns pontok, amelyekben keressük a kezdetiérték probléma megoldásának értékét. A kezdetiérték probléma közelítő megoldását a Runge-Kutta módszer segítségével a következő képletekkel számíthatjuk ki.

$$\begin{aligned}
u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),\\
u(x_0) &= y_0,\\
&\text{ahol}\\
k_1^{(i)} &= f(x_i, u_i),\\
k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_1^{(i)}\right),\\
k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_2^{(i)}\right),\\
k_4^{(i)} &= f\left(x_i + h, u_i + hk_3^{(i)}\right),
\end{aligned}$$

ahol $u_i \approx y(x_i),\ i = 0,1,\dots n$.

a) Mivel $x \in [0,2]$, $h = \frac{2-0}{5} = 0.4$. Úgyszintén $x_0 = 0$ és $u_0 = 1.5$. Alkalmazva a fenti képleteket, a következő eredményeket kapjuk.

i	u_i	x_i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	u_{i+1}
0	1.5000	0.0	1.5000	1.6000	1.6200	1.7480	2.1459
1	2.1459	0.4	1.7459	1.8950	1.9249	2.1158	2.9126
2	2.9126	0.8	2.1126	2.3352	2.3797	2.6645	3.8598
3	3.8598	1.2	2.6598	2.9917	3.0581	3.4830	5.0759
4	5.0759	1.6	3.4759	3.9711	4.0701	4.7040	6.6934

A táblázat alapján a megoldás közelítő értéke az $x \in [0,2]$ intervallumon az (x_i, u_i), $i = 0,1,\dots,5$ rendezett párok halmaza. Az áttekinthetőség miatt ezeket a rendezett párokat a következő táblázatban foglaljuk össze.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
y_i	1.5000	2.1459	2.9126	3.8598	5.0759	6.6934

◇

b) Az intervallum szélei, amelyen keressük a kezdetiérték probléma megoldását $a = 0$ és $b = 1$. Innen $h = \frac{b-a}{n} = 0.2$. A kezdeti feltételekből láthatjuk, hogy $x_0 = 0$ és $u_0 = 1$. A fenti képleteket alkalmazva a következő táblázatot állíthatjuk össze.

i	u_i	x_i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	u_{i+1}
0	1.00000	0.0	-1.00000	-1.20000	-1.24000	-1.49600	0.75413
1	0.75413	0.2	-1.49170	-1.79010	-1.84970	-2.23160	0.38737
2	0.38737	0.4	-2.22530	-2.67030	-2.75930	-3.32900	-0.15975
3	-0.15975	0.6	-3.31950	-3.98340	-4.11620	-4.96600	-0.97591
4	-0.97591	0.8	-4.95180	-5.94220	-6.14030	-7.40790	-2.19340

A kezdetiérték probléma közelítő megoldása a következő.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1.00000	0.75413	0.38737	-0.15975	-0.97591	-2.19340

◇

c) A kezdetiérték probléma és az intervallum alapján, amelyen keressük a megoldást, felírhatjuk, hogy $h = 0.2$ és $x_0 = 0,\ u_i = 0.$ A Runge-Kutta módszert alkalmazva a következő eredményeket kapjuk.

i	u_i	x_i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	u_{i+1}
0	0.00000	0.0	0.00000	0.01000	0.01000	0.04000	0.00267
1	0.00267	0.2	0.04001	0.09004	0.09014	0.16043	0.00267
2	0.00267	0.4	0.16046	0.25140	0.25216	0.36515	0.02136
3	0.021365	0.6	0.36525	0.50188	0.50504	0.67009	0.07245
4	0.07245	0.8	0.67031	0.86814	0.87807	1.12230	0.35026

A kezdetiérték probléma közelítő megoldása egy görbe, amit a következő pontok határoznak meg.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	0.00000	0.00267	0.00267	0.02136	0.07245	0.35026

◇

d) A kezdetiérték probléma alapján $h = 0.2.$ A Runge-Kutta módszert alkalmazva a következő táblázatot kapjuk.

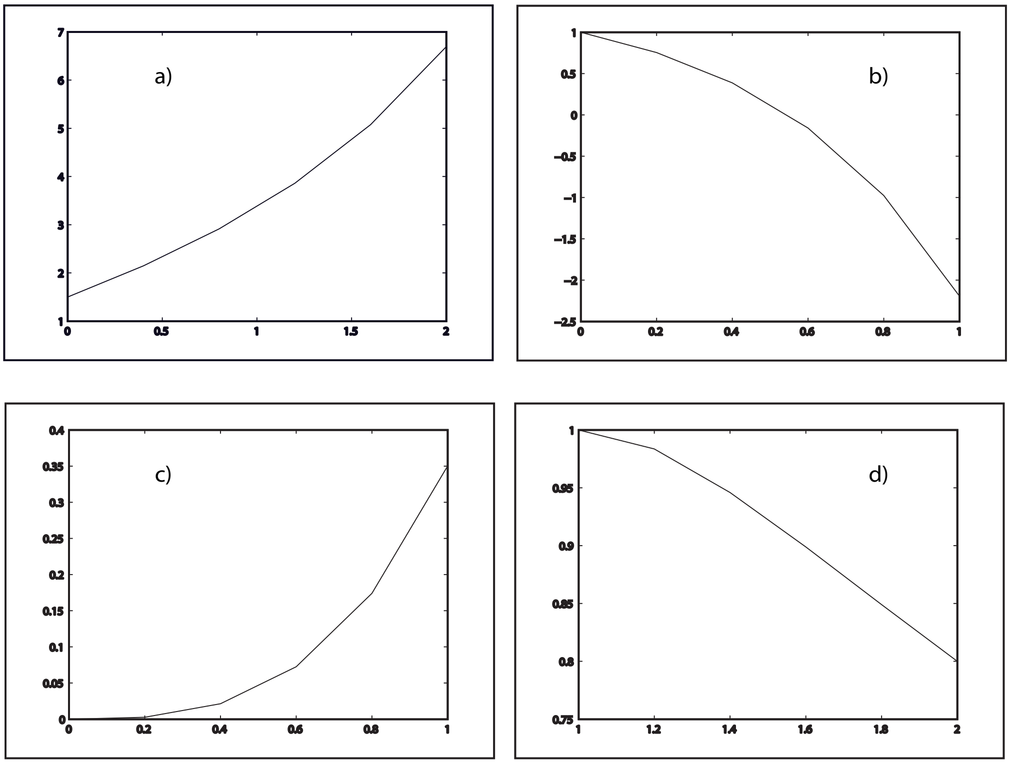
i	u_i	x_i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	u_{i+1}
0	1.00000	1.0	0.00000	-0.09091	-0.08107	-0.14801	0.98360
1	0.98360	1.2	-0.14780	-0.19337	-0.18806	-0.21919	0.94594
2	0.94594	1.4	-0.21913	-0.23781	-0.23560	-0.24611	0.89887
3	0.89887	1.6	-0.24617	-0.25005	-0.24960	-0.24908	0.84905
4	0.84905	1.8	-0.24919	-0.24544	-0.24586	-0.23987	0.80000

A táblázatból láthatjuk, hogy a feladat közelítő megoldását a következő rendezett párok határozzák meg.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1.00000	0.98360	0.94594	0.89887	0.84905	0.80000

◇

A feladatban adott kezdetiérték problémák közelítő megoldásainak grafikonjai a 4.11 ábrán láthatók. Ezeket a grafikonokat a Runge-Kutta módszer által meghatározott rendezett párok interpolációjával kaptuk.



4.11. ábra: A kezdetiérték problémák közelítő megoldása

4.6.1 Gyakorlásra szánt feladatok

114. Feladat. Határozza meg az $x_1 = 0.01 \pm 0.005$ és $x_2 = 0.002 \pm 0.0005$ közelítő számok, valamint az $y = \frac{x_1}{x_2 - x_1}$ függvény értékének abszolút és relatív hibahatárát.

115. Feladat. Határozza meg az $x = 2 \pm 0.005$ közelítő szám és az $y = x + 2\ln x$ függvény értékének abszolút és relatív hibahatárát.

116. Feladat. Határozza meg az $x = 0.01 \pm 0.005$ közelítő szám és az $y = \frac{x^2+3}{3x^3+1}$ függvény értékének abszolút és relatív hibahatárát.

117. Feladat. Határozza meg az $x = 0.01 \pm 0.005$ közelítő szám és az $y = e^{3x-2}$ függvény értékének abszolút és relatív hibahatárát.

118. Feladat. Határozza meg a $x = \frac{\pi}{4} \pm 0.005$ közelítő szám és az $y = (x^2 + 3)\sin x$ függvény értékének abszolút és relatív hibahatárát.

119. Feladat. Határozza meg az $f(x) = 1 - 3^x$ függvény Lagrange-féle interpolációs polinomját, ha adottak az $x_i = i,\ i = 0, 1, 2, 3$ alappontok.

120. Feladat. Határozza meg az $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ függvény Lagrange-féle interpolációs polinomját, ha adottak az $x_i = i^2,\ i = 0, 1, 2, 3$ alappontok.

121. Feladat. Határozza meg a táblázattal adott függvény Newton-féle interpolációs polinomját.

x_k	1	2	3	5
$f(x_k)$	1	5	17	89

122. Feladat. Határozza meg a táblázattal adott függvény Newton-féle interpolációs polinomját.

x_k	0.2	0.9	1.7	2.3
$f(x_k)$	-0.32189	-0.09482	0.90207	1.91569

123. Feladat. Határozza meg az $\ln x - \frac{x-1}{x}$ függvény interpolációs polinomját, amely a $4,\ 8$ és 10 pontokon keresztül halad át.

124. Feladat. Lokalizálja a $2^x + x - 3 = 0$ egyenlet gyökeit, majd a felezési módszerrel oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

125. Feladat. Lokalizálja az $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$ egyenlet gyökeit, majd felezési módszerrel oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

126. Feladat. Lokalizálja a $3x^4 - 3 - 8x^2 = 0$ egyenlet gyökeit, majd felezési módszerrel oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

127. Feladat. Lokalizálja a $2x - 3 - \sin x = 0$ egyenlet gyökét, majd a Newton-módszer segítségével oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

128. Feladat. Lokalizálja az $\ln x - \cos x = 0$ egyenlet gyökét, majd a Newton-módszer segítségével oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

129. Feladat. Lokalizálja az $x^2 + 2x + 2^x = 0$ egyenlet gyökét, majd a Newton-módszer segítségével oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

130. Feladat. Lokalizálja az $x - \frac{3}{2} + \sin x = 0$ egyenlet gyökeit, majd a szelőmódszer segítségével oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

131. Feladat. Lokalizálja az $2x - \cos 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökeit, majd a szelőmódszer segítségével oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

132. Feladat. Lokalizálja az $(x-1)^2 - 1 - \log x = 0$ egyenlet gyökeit, majd a szelőmódszer segítségével oldja meg az egyenletet 10^{-2} pontossággal.

133. Feladat. Határozza meg az $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x}\, \mathrm{d}x$ integrál közelítő értékét a trapézformula segítségével úgy, hogy az integrálási intervallumot hat egyenlő részre osztja.

134. Feladat. Határozza meg az $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ integrál közelítő értékét a trapézformula segítségével úgy, hogy az integrálási intervallumot öt egyenlő részre osztja.

135. Feladat. Számítsa ki a táblázattal adott függvény integrálját.

x	1	$5/4$	$6/4$	$7/4$	$8/4$
y	2	2.97302	4.24264	5.88627	8

136. Feladat. Runge-Kutta módszer segítségével oldja meg az $y' = \frac{x^2-3}{y^3-x}$ differenciálegyenletet, ha adott az $y(2) = 1$ kezdeti feltétel. A megoldást a $[2, 3]$ intervallumon adja meg úgy, hogy az adott intervallumot öt egyenlő részre osztja.

A. Függelék

Fourier és inverz Fourier transzformáció

Mivel a korlátozott óraszám miatt a tárgy keretein belül a hallgatónak nincs lehetősége megismerkedni a Fourier és inverz Fourier transzformáció elméletével, ebben a fejezetben röviden bemutatjuk az említett anyagrész alapjait.

A Fourier sor egy periódusos hullámot szinuszokból és koszinuszokból, vagy pedig komplex exponenciális e^{inx} alakú függvényekből álló végtelen sor alakjában írja fel. Gyakran felmerül a nem periodikus függvények ilyen végtelen sorba fejtésének kérdése. Ez a probléma a Fourier transzformáció segítségével oldható meg. Alkalmazási területe főként a jel és hangfeldolgozás. Egy időben változó jel (függvény) előállítható különböző frekvenciájú, fázisú és amplitúdójú jelek (függvények) összegeként. A Fourier transzformáció az a művelet, amely egy adott jelhez megadja ezta felbontást. A Fourier transzformáció ismerete alapvető fontosságú a lineáris rendszerek tulajdonságainak vizsgálatához.

30. Definíció. A valós illetve komplex változójú függvény Foureir transzformációja

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x,$$

ahol $\xi \in \mathbb{R}$.

A Fourier transzformáció tulajdonságai:

- az f függvény $\widehat{f}(\xi)$ Fourier transzformációja értlemezve van minden $\xi \in \mathbb{R}$-re;
- az f függvény $\widehat{f}(\xi)$ Fourier transzformációja korlátos és folytonos függvény;
- $\lim\limits_{\xi \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$;
- a Fourier transzformáció lineáris: ha $h(x) = af(x) + bg(x)$, ahol $a, b \in \mathbb{C}$ komplex számok, akkor $\widehat{h}(\xi) = a\widehat{f}(\xi) + b\widehat{g}(\xi)$;
- ha az f valós függvény páros, akkor a $\widehat{f}(\xi)$ Fourier transzformáció is valós és páros;
- a az f valós függvény páratlan, akkor a $\widehat{f}(\xi)$ Fourier transzformáció páratlan és imaginárius;
- SHIFT képlet: legyen $g(x) = f(ax+b)$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok. Érvényes a $\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{-i\xi b}{a}} \widehat{f}(\frac{\xi}{a})$ shift képlet;

- deriválás képlete: ha az f függvény deriválható, akkor $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi)$, a magasabb rendű deriváltakat pedig a $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \cdot \widehat{f}(\xi)$ képlet segítségével határozhatjuk meg;
- ha $g(x) = xf(x)$, akkor $\widehat{g}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$;

A Fourier transzformációk táblázata:

Tulajdonság	Függvény	Fourier transzformáció
	$f(x)$	$\widehat{f}(\xi)$
derivált	$f'(x)$	$2\pi i\xi f(\xi)$
inverz	$\widehat{f}(\xi)$	$2\pi f(-\xi)$
transzláció	$f(x-x_0)$	$e^{-ix_0\xi}\widehat{f}(\xi)$
moduláció	$e^{iax}f(a)$	$\widehat{f}(\xi-a)$
osztás	$f(\frac{x}{s})$	$\|s\|\widehat{f}(s\xi)$
derivált idő szerint	$f^{(p)}(x)$	$(i\xi)^p\widehat{f}(\xi)$
derivált frekvenció szeerint	$(-ix)^p f(x)$	$\widehat{f}^p(\xi)$

A Fourier transzformáció bemenete egy f függvény, kimenete pedig egy másik $\widehat{f}$ függvény. Ennek a folyamatnak a fordítottját, amely a Fourier transzformáció által kapott függvényt kezeli bemenetelként és az eredeti függvényt adja kimenetként, *inverz Fourier transzformációnak* nevezzük.

31. Definíció. A valós illetve komplex változójú függvény inverz Fourier transzformációja

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

43. Példa. Határozza meg az adott függvények Fourier transzformációját.

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 5 \\ 0, & \text{ha } x \notin [0,5) \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$.

Megoldás. Az $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x$, képletet alkalmazzuk.

a) Mivel az $f(x) \equiv 1$ az $x \in [0,5)$ intervallumon és $f(x) \equiv 0$ az említett intervallumon kívül,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{5} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} -i\xi x = t & t\in[0,-5i\xi] \\ -i\xi\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t & \\ \mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}t}{i\xi} & \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{i\xi}\right)\int_{0}^{-5i\xi} e^{t}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2\pi i\xi}e^{t}\Big|_{0}^{-5i\xi} = \frac{-1}{2\pi i\xi}(e^{-5i\xi}-1) = \frac{1-e^{-5i\xi}}{2\pi i\xi}.
\end{aligned}$$

◇

b) Mivel $f(x)\equiv 0$ az $x\in(-\infty,0)$ intervallumon, így

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x(a+i\xi)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} -x(a+i\xi) = t & t\in[0,-\infty) \\ -(a+i\xi)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t & \\ \mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}t}{a+i\xi} & \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{-1}{a+i\xi}\right)\int_{0}^{-\infty} e^{t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{-1}{2\pi(a+i\xi)}e^{t}\Big|_{0}^{-\infty} = \frac{-1}{2\pi(a+i\xi)}(e^{-\infty}-e^{0}) = \frac{1}{2\pi(a+i\xi)}.
\end{aligned}$$

A kapott kifejezést megszorozzuk az $\frac{a-i\xi}{a-i\xi}$ törttel, hogy megszabaduljunk a nevezőben levő komplex számtól. Ekkor:

$$\frac{1}{2\pi(a+i\xi)} = \frac{1}{2\pi(a+i\xi)}\cdot\frac{a-i\xi}{a-i\xi} = \frac{a-i\xi}{2\pi(a^2+\xi^2)} = \frac{a}{2\pi(a^2+\xi^2)} - i\frac{\xi}{2\pi(a^2+\xi^2)}.$$

◇

Irodalomjegyzék

[1] Bahvalov N. Sz.: A gépi matematika numerikus módszerei; analízis, algebra, optimizálás, közönséges differenciálegyenletek, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1977

[2] Burden R. L., Faieres J. D.: Numerical Analysis, PWS Publishing Company, Boston

[3] Conte S. D., de Boor C.: Elementary Numerical Analysis: An algorithmic approach, McGgraw-Hill Book Company, 1980

[4] Craw I.: Advanced Calculus and Analysis MA1002, University of Aberdeen, Aberdeen, 2000

[5] Csikós P. G.: Matematikai analízis; Feladatgyűjtemény a gyakorlatokhoz, Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka, 2008

[6] Gajić Lj. - i dr.: Zbirka zadataka iz analize I, drugi deo, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998

[7] Grupa autora: Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978

[8] Hartung F.: Bevezetés a numerikus analízisbe, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2004

[9] Herceg D., Krejić N.: Numerička analiza, Stylos, Novi Sad, 1997

[10] Karris S. T.: Numerical Analysis Using Matlab and Spreadsheets, Second Edition, Orchard Publications

[11] Miličić P. M., Ušćumlić M. P.: Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1981

[12] Perišić D. - i dr.: Funkcije više promenljivih; diferencijalni i integralni račun, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1997

[13] Protter M. H.: Basic Elements of Real Analysis, Springer, New York, 1998

[14] Stoer J., Bulirsch R.: Introduction to Numerical Analysis, Springer - Verlag, Berlin, 1992