Суботица
Szabadka
Subotica
Subotica
2024

13. МЕЂУНАРОДНА МЕТОДИЧКА КОНФЕРЕНЦИЈА

Компетенције

13. NEMZETKÖZI MÓDSZERTANI KONFERENCIA

Kompetenciák

13. MEĐUNARODNA METODIČKA KONFERENCIJA

Kompetencije

13TH INTERNATIONAL METHODOLOGICAL CONFERENCE

Competences

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ НА МАЂАРСКОМ НАСТАВНОМ ЈЕЗИКУ У СУБОТИЦИ
ÚJVIDÉKI EGYETEM MAGYAR TANNYELVŰ TANÍTÓKÉPZŐ KAR, SZABADKA
SVEUČILIŠTE U NOVOM SADU UČITELJSKI FAKULTET NA MAĐARSKOM NASTAVNOM JEZIKU U SUBOTICI
UNIVERSITY OF NOVI SAD HUNGARIAN LANGUAGE TEACHER TRAINING FACULTY, SUBOTICA

13. Међународна методичка конференција

КОМПЕТЕНЦИЈЕ

Зборник радова

Датум одржавања: 7–8. новембар 2024.
Место: Универзитет у Новом Саду, Учитељски факултет на мађарском наставном језику,
Суботица, ул. Штросмајерова 11., Република Србија

13. Nemzetközi Módszertani Konferencia

KOMPETENCIÁK

Tanulmánygyűjtemény

A konferencia időpontja: 2024. november 7–8.
Helyszíne: Újvidéki Egyetem, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar,
Szabadka, Strossmayer utca 11., Szerb Köztársaság

13. Međunarodna metodička konferencija

KOMPETENCIJE

Zbornik radova

Datum održavanja: 7–8. studeni 2024.
Mjesto: Sveučilište u Novom Sadu, Učiteljski fakultet na mađarskom nastavnom jeziku,
Subotica, ul. Strossmayerova 11., Republika Srbija

13th International Methodological Conference

COMPETENCES

Papers of Studies

Date: November 7–8, 2024
Address: University of Novi Sad, Hungarian Language Teacher Training Faculty,
Subotica, 11 Štrosmajerova str., Republic of Serbia

Издавач
Универзитет у Новом Саду
Учитељски факултет на мађарском наставном језику
Суботица

Kiadó
Újvidéki Egyetem
Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar
Szabadka

Izdavač
Sveučilište u Novom Sadu
Učiteljski fakultet na mađarskom nastavnom jeziku
Subotica

Publisher
University of Novi Sad
Hungarian Language Teacher Training Faculty
Subotica

Одговорни уредник / Felelős szerkesztő / Odgovorni urednik / Editor-in-chief

Valéria Pintér Krekić

Уредник / Szerkesztő / Urednik / Editor

Márta Törteli Telek
Éva Vukov Raffai

Технички уредник / Tördelőszerkesztő / Tehnički urednik / Layout editor

Attila Vinkó
Zsolt Vinkler

+381 (24) 624 444
magister.uns.ac.rs/conf
inter.conf@magister.uns.ac.rs

ISBN 978-86-81960-32-5

Суботица – Szabadka – Subotica – Subotica
2024

САДРЖАЈ
TARTALOM
SADRŽAJ
CONTENTS

MATEMATIKAI ÉS KOGNITÍV KOMPETENCIAFEJLESZTÉS TÁBLÁZATOS BETŰRENDEZÉS FELADATON ALAPULÓ ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓK TANÍTÁSÁVAL ÓVODÁS ÉS ÁLTALÁNOS ISKOLÁS GYEREKEKNEK

STANKOV GORDANA [1,2], PAPP ZOLTÁN [3], SZILÁGYINÉ SZINGER IBOLYA [1]

[1] Eötvös József Főiskola, Baja, Magyarország
[2] Dunaújvárosi Egyetem, Informatikai Intézet, Matematika és Számítástudományi Tanszék, Dunaújváros, Magyarország
[3] Újvidéki Egyetem Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka, Szerb Köztársaság
sgordonka@yahoo.com, zoltan.papp@magister.uns.ac.rs, szilagyine.szinger.ibolya@ejf.hu

Összefoglaló

A cikk bemutatja, hogyan fejleszthetők hatékonyan a matematikai és kognitív kompetenciák a kombinatorika oktatásával. A szerzők különös hangsúlyt fektetnek a táblázatos betűrendezés feladat megoldására szolgáló ismétléses permutációk tanítására óvodás és általános iskolás gyerekek körében. A táblázatos betűrendezés feladat játékos megoldási módszere révén a gyerekek könnyedén elsajátíthatják a bonyolult matematikai fogalmakat, miközben logikai gondolkodásuk, számolási készségeik és emlékezőképességük is fejlődik. A cikk részletesen tárgyalja, hogyan adaptálható ez a módszer különböző életkorú gyerekek számára, valamint bemutatja a gyakorlati lépéseket, játékokat és feladatokat, amelyekkel a permutáció fogalma érthetővé válik. Az eredmények igazolják, hogy a táblázatos betűrendezés feladaton alapuló tanítás erősíti a matematikai készségeket, miközben támogatja a gyerekek kognitív fejlődését, különös tekintettel a problémamegoldó és logikai gondolkodásukra.

Kulcsszavak: *kombinatorika, ismétléses permutáció, táblázatos betűrendezés feladat, matematikai kompetencia, játékos tanulás*

1. Bevezető

A kombinatorika, mint a matematika egyik izgalmas területe, a számolási és logikai elvek összefonódásával foglalkozik. Hagyományosan a kombinatorika oktatása során a tanárok főként képleteket és alapfogalmakat tanítanak, amelyek gyakran nem elegendőek a diákok kreativitásának és problémamegoldó képességének fejlesztéséhez. Az ilyen passzív tanítási módszerek mellett a tanulók többnyire csak a kész képleteket memorizálják, anélkül, hogy megértenék azok létrejöttét vagy alkalmazásának módját különféle problémák megoldásakor.

Ezzel szemben a modern pedagógiai megközelítések célja, hogy a diákok aktív résztvevőkké váljanak a matematika tanulásában, nemcsak mint befogadói, hanem mint alkotói is a tudásnak. Ez azt jelenti, hogy a tanulók lehetőséget kapnak arra, hogy saját maguk, aktivitásokon keresztül és különböző reprezentációk felhasználásával hozzák létre a kombinatorikai fogalmakat, képletek és megoldási stratégiákat.

A tanulmány konkrét példával illusztrálja ezt a megközelítést, bemutatva, hogyan fejleszthetők a matematikai és kognitív kompetenciák a kombinatorika játékos oktatásával. Különös figyelmet kap a táblázatos betűrendezés feladat, amely az ismétléses permutációk tanítására összpontosít óvodás és általános iskolás gyerekek számára. Ennek a feladatnak a játékos megközelítése lehetővé teszi a gyerekek számára, hogy könnyedén megértsék és elsajátítsák az összetett matematikai fogalmakat. A táblázatos betűrendezés feladat játékos megoldási módszerének begyakorlásával fejlődnek a gyerekek logikai gondolkodási készségei, számolási képességei és memóriája, miközben fokozatosan bevezetésre kerülnek a kombinatorika alapvető fogalmai. A táblázatos betűrendezésre épülő feladatok nemcsak a matematikai készségeket erősítik, hanem a kognitív fejlődést is támogatják, különösen a problémamegoldó és logikai gondolkodás terén. A tanulmány részletesen tárgyalja a módszer adaptálhatóságát különböző életkorú gyerekek számára, bemutatva a gyakorlati lépéseket, játékokat és feladatokat, amelyekkel a permutáció fogalma érthetővé válik a fiatal tanulók számára. Az új oktatási megközelítés célja, hogy ne csak a képletek helyes alkalmazását tanítsa meg, hanem arra is ösztönözze a diákokat, hogy magyarázzák meg gondolkodási folyamataikat és megoldásaikat, ezáltal fejlesztve kreativitásukat és önálló matematikai gondolkodásukat.

1.1. Probléma felvetése

Az ismétléses permutációk fogalmának bevezetése a középiskolában komoly kihívást jelent mind a tanárok, mind a diákok számára. A tanulók többsége számára az ismétléses permutációk absztrakt fogalma nehezen érthető, és gyakran elidegeníti őket a kombinatorika témakörétől. A képlet, amely az ismétléses permutációk számítására szolgál, sokakban félelmet kelt, és inkább a memorizálásra kényszeríti a diákokat, semmint a megértésre. Ennek következtében bár sokan képesek alkalmazni a képletet egy konkrét probléma megoldása során, nehézséget okoz számukra annak felismerése, hogy egy adott feladat valóban az ismétléses permutációk problémakörébe tartozik. A probléma további nehézsége, hogy a diákok sokszor nem látják az összefüggést a képletek és a valós életbeli helyzetek között, így a kombinatorika elvont fogalma távolinak tűnik számukra. Gyakran hiányzik az az intuitív megközelítés, amely segítené a diákokat abban, hogy saját tapasztalataikra alapozva értsék meg az ismétléses permutációk alkalmazhatóságát és fontosságát különféle problémák megoldásakor.

A szerzők célja, hogy ezt a nehézséget áthidalják, egy új megközelítéssel vezetik be az ismétléses permutációk fogalmát, amely már fiatalabb korban előkészíti a középiskolás tanulókat a későbbi kombinatorikai tanulmányokra. A módszer alapját a táblázatos betűrendezési feladat képezi, amely játékos és algoritmikus megoldási lehetőségeket kínál. Az ilyen típusú feladatok segítségével a tanulók különböző korosztályokban fokozatosan sajátíthatják el az ismétléses permutációk fogalmát. A módszer különlegessége, hogy az algoritmikus megoldási mód segítségével a diákok lépésről lépésre követhetik a betűk elrendezésének folyamatát, ami segíti őket a mögöttes logika megértésében. Ezt követően, amikor már kialakult egy intuitív megértés, a szerzők bevezetik a kombinatorikus megközelítést, amelyben már az ismétléses permutációk képletét alkalmazzák. Így a tanulók nemcsak mechanikusan tanulják meg a képletet, hanem annak értelmezését és alkalmazását is megértik.

Ez a pedagógiai módszer lehetőséget nyújt a diákok számára, hogy saját felfedezéseiken keresztül alakítsák ki a kombinatorikai gondolkodás alapjait. A táblázatos betűrendezési feladatok játékos formája pedig segít abban, hogy a tanulók pozitív élményeket szerezzenek a kombinatorikai problémák megoldása során, így csökkentve a tantárgytól való félelmüket és növelve érdeklődésüket a matematika iránt.

2. Elméleti háttér

2.1. A kombinatorika és a kompetenciák fejlesztésének kapcsolata

A kombinatorika a matematika azon ága, amely különféle tárgyak és elemek elrendezését, illetve sorba rendezését vizsgálja, és figyelembe veszi az összes lehetséges lehetőséget. A kombinatorika a 17. században alakult ki. Sokáig nem tekintették a matematika önálló ágának. A kombinatorika elemeit már korábban is használták: a vadászok stratégiáik tervezéséhez, a katonák haditaktikák kidolgozásához, a munkások pedig eszközeik hatékony használatához. Érdekes kombinatorikai problémák már ebben az időszakban is felmerültek (Siddikov, 2022).

A kombinatorika első tanulmányait olasz tudósok, például D. Cardano, N. Tartaglia (1499-1557) és G. Galileo (1564-1642), valamint a francia tudós B. Pascal (1623-1662) végezték. G. Leibniz volt az első, aki a kombinatorikát önálló matematikai ágként tanulmányozta. 1666-ban írta meg a „Combinatorika művészetéről" című munkáját, amelyben először használta a „kombinatorika" kifejezést.

A kombinatorika oktatása nemcsak a matematikai ismeretek bővítését szolgálja, hanem számos olyan készség és kompetencia fejlesztésére is alkalmas, amelyek a mindennapi életben és más tantárgyak elsajátításában is hasznosak lehetnek. A kombinatorikai feladatok és problémák megoldása hozzájárulhat különböző kompetenciák fejlesztéséhez.

- Logikai gondolkodás és problémamegoldó képesség: A kombinatorika megköveteli a diákoktól a logikai következtetések alkalmazását. Amikor egy tanuló kombinatorikai feladattal találkozik, például különböző sorrendek, csoportosítások vagy elrendezések kiszámításával, lépésről lépésre kell elemeznie a probléma struktúráját. Ez a folyamat fejleszti a logikai gondolkodást, hiszen a tanulónak az összefüggések felismerésére, a különböző megoldási stratégiák mérlegelésére és a helyes megközelítés kiválasztására van szüksége.
- Kreativitás és innovatív gondolkodás: a kombinatorika lehetőséget ad a kreatív gondolkodás kibontakoztatására. A kombinatorikai problémák gyakran többféle módon is megoldhatók, ami lehetőséget biztosít a diákok számára, hogy saját ötleteik és intuíciójuk alapján találjanak új megoldásokat. Az új megközelítések keresése és a saját módszerek kidolgozása ösztönzi a kreatív gondolkodást, amely kulcsfontosságú a tudományos és innovatív területeken.
- Algoritmikus gondolkodás és algoritmusok alkalmazása: A kombinatorikai feladatok megoldása során a tanulók gyakran találkoznak olyan problémákkal, amelyek megoldásához algoritmusok alkalmazására van szükség. Az algoritmikus gondolkodás magában foglalja a lépések sorrendjének tervezését, az ismétlődések kezelését és a hatékony számítási módszerek kidolgozását. Például az ismétléses permutációk vagy kombinációk kiszámításakor a tanulóknak meg kell érteniük az adott feladat szerkezetét, és képesnek kell lenniük lépésenként felépíteni a megoldást. Ez a folyamat fejleszti az algoritmikus gondolkodást, amely a programozás és a számítástechnika területén is hasznos készség.
- Számolási készségek és numerikus kompetencia: A kombinatorikai problémák megoldása szorosan összefügg a számolási készségek fejlesztésével is. A diákok gyakran nagy számokkal dolgoznak, amikor különböző permutációkat, kombinációkat vagy faktoriális értékeket számolnak ki. Ezek a feladatok segítenek a tanulóknak abban, hogy gyakorolják a nagy számokkal végzett műveleteket, fejlesszék numerikus kompetenciájukat, és megtanulják helyesen kezelni a számításokat. Az ilyen típusú gyakorlatok hozzájárulnak a számolási pontosság és a számolási gyorsaság javulásához.
- Rendszerezési és szervezési készségek: A kombinatorikai feladatok gyakran igénylik a rendszerezést és a szervezést, különösen akkor, amikor a diákok különböző lehetőségeket vagy eseteket számolnak össze. Például egy permutációs probléma megoldása során a tanulónak rendszereznie kell az ismétlődő elemeket és meg kell különböztetnie az eseteket, hogy elkerülje a duplikációkat. Az ilyen feladatok fejlesztik a tanulók rendszerezési és szervezési készségeit, amelyek fontosak a problémák megoldásának logikus és átlátható megközelítésében.
- Kommunikációs készségek és a matematika nyelvének elsajátítása: A kombinatorika tanítása során a diákok megtanulják, hogyan fejezzék ki gondolataikat a matematika nyelvén. A problémamegoldás során fontos, hogy a tanulók képesek legyenek pontosan megfogalmazni, milyen megközelítést alkalmaznak, milyen képleteket használnak, és hogyan jutnak el a megoldásig. A matematikai kommunikáció fejlesztése hozzájárul a pontos fogalmazási készségek kialakulásához, ami segíti a tanulókat más tantárgyakban is, ahol logikus érvelésre és pontos kifejezésmódra van szükség.
- Türelem, kitartás és koncentráció: A kombinatorikai problémák megoldása gyakran időigényes és kitartást igényel. Sok esetben a helyes megoldás megtalálásához a diákoknak több próbálkozásra van szükségük, és különböző módszereket kell kipróbálniuk. Ez a folyamat fejleszti a türelmet és a kitartást, mivel a tanulók megtanulják, hogy a sikerhez időre és szorgalomra van szükség. Emellett a kombinatorikai feladatok megoldása fokozott koncentrációt igényel, mivel egyetlen számítási hiba is megváltoztathatja az eredményt.

2.2 Reprezentációk

A reprezentáció fogalmát akkor alkalmazzuk, amikor egy dolog vagy fogalom egy másik dolog vagy fogalom ábrázolását szolgálja – emeli ki Duval (2006). Véleménye szerint „... a reprezentációk jelekből és azok szabályok által meghatározott összetett kapcsolataiból állnak, melyek lehetővé teszik rendszerek, folyamatok vagy jelenségek leírását” (Duval, 2006: 104). Janvier (1987) szerint a reprezentációk alapja lehet valós tárgyak, papírra vetett ábrák vagy akár az egyén elméjében létező ötletek. A reprezentációk keletkezési helyük alapján két fő kategóriába sorolhatók: külső és belső. A külső reprezentációk a környezetben jönnek létre és ott léteznek, míg a belsők az egyén tudásának részeként alakulnak ki és tárolódnak (Zhang, 1997).

Zhang (1997) továbbá rámutat arra, hogy a külső reprezentációk memorizálása által belső reprezentációkká alakíthatók, míg a belső reprezentációk is külsővé tehetők. Haciomeroglu, Aspinwall és Presmeg (2010) megjegyzik, hogy a belső és a külső reprezentáció gyakran nem teljesen azonos. Bruner (1966) szerint a tudás belső reprezentációinak három típusa különböztethető meg: konkrét, ikonikus és szimbolikus. A konkrét reprezentációk tárgyak használatával jönnek létre, az ikonikusak képek és ábrák segítségével, míg a szimbolikus reprezentációk szimbólumok használatával alakulnak ki. Bruner (1996) azt javasolja, hogy a tanulási folyamat kezdeti szakaszában a diákok konkrét tárgyakat alkalmazzanak, majd ezt követően képeket, ábrákat, végül szimbólumokat.

Miura (2001) szerint a reprezentációknak két típusa van: oktatási és kognitív reprezentációk. Az oktatási reprezentációkat a tanárok használják a tanulás elősegítésére, míg a kognitív reprezentációkat a tanulók saját maguk hozzák létre matematikai fogalmak tanulása vagy problémamegoldás során. Palmer (1978) úgy véli, hogy a reprezentált világ objektumai közötti kapcsolatok megfelelnek az ábrázolt világ kapcsolatrendszerének. Samsuddin és Retnawati (2018) szerint a reprezentáció híd az absztrakt matematikai fogalmak és a mindennapi élet közötti összefüggések megértésében.

Duval (2006) hangsúlyozza, hogy a különböző reprezentációk közötti áttérés kulcsfontosságú a matematikai tanulásban, mivel ezek eltérő jellemzőket emelnek ki a reprezentált tárgyakról. Mivel a reprezentációk mind a kommunikációban, mind a gondolkodásban fontos szerepet játszanak, elengedhetetlen, hogy a diákok megtanulják azokat elkészíteni és értelmezni (Greeno és Hall, 1997). Mainali (2019) szerint a különböző reprezentációs formák ismerete azért lényeges, mert bizonyos problémák megoldása hatékonyabb a megfelelő reprezentációk alkalmazásával.

Számos kutató, köztük Kilpatrick, Swafford és Findell (2001), Greeno és Hall (1997), valamint Goldin és Shteingold (2001), egyetért abban, hogy a reprezentációk használata elősegíti a tanulási folyamatot. A konkrét reprezentációk felsőoktatásban való alkalmazását több tanulmány is dokumentálja, például Chan és Chan (2023), Hunt, Nipper és Nash (2011), valamint Stankov (2014).

2.3 Pólya György regresszió elve

Pólya György, a 20. század egyik legnagyobb matematikusa, jelentős hatást gyakorolt a problémamegoldás pedagógiájára. A regresszió elve, amely Pólya gondolkodásmódjának egyik kulcseleme, az analitikus problémamegoldás hatékony eszköze. Az elv lényege, hogy egy bonyolult problémát úgy közelítünk meg, hogy visszalépünk egy egyszerűbb, már ismert problémához, majd a megoldás során szerzett ismereteket visszavezetjük az eredeti problémára. Ez az elv nemcsak matematikai problémákra alkalmazható, hanem általános gondolkodási stratégiát is nyújt (Pólya, 1945).

A regresszió elve szerint, amikor egy problémával szembesülünk, először érdemes visszalépni az alapokhoz. Pólya hangsúlyozta, hogy a problémák elemzésének első lépése a megértés: pontosan meg kell határozni, hogy mit keresünk, milyen információk állnak rendelkezésünkre, és hogyan viszonyul az adott probléma más, már megoldott problémákhoz. A regresszió során olyan egyszerűsített problémát keresünk, amelynek megoldása közelebb vihet minket az eredeti kérdés megválaszolásához (Pólya, 2009).

Pólya szerint a matematikai gondolkodás tanításának középpontjában a problémamegoldás áll, amelyben a regresszió elve kiemelt szerepet kap. A diákoknak meg kell tanulniuk, hogyan bontsák le a bonyolult kérdéseket egyszerűbb részekre, és hogyan alkalmazzák a már megszerzett tudást új helyzetekben. Ez a módszer nemcsak a matematikai kompetenciát fejleszti, hanem a kritikus gondolkodás képességét is (Pólya, 2014).

2.4 Probléma ekvivalens transzformációja

A matematikai problémamegoldás egyik hatékony eszköze az ekvivalens transzformáció, amely során egy adott problémát egy másik, az eredetivel ekvivalens problémára alakítunk át. Az ilyen transzformáció célja, hogy a probléma könnyebben kezelhető, jobban érthető vagy egyszerűbben megoldható legyen, miközben az eredeti probléma lényegi tulajdonságai nem változnak. Ez a módszer különösen fontos szerepet játszik az analitikus gondolkodás fejlesztésében és az összetett problémák megoldásában (Pólya, 1945; Schoenfeld, 2014).

Az ekvivalens transzformáció kulcsfontosságú feltétele, hogy az átalakítás során a probléma megoldásának helyessége és értelmezhetősége megmaradjon. Ez azt jelenti, hogy az eredeti és az átalakított probléma ugyanazokat a megoldásokat adja, vagy az egyik problémára adott válasz egyértelműen megfeleltethető a másik megoldásának (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Az átalakítás során alkalmazott módszerek lehetnek:

- Algebrai manipulációk: Például egy bonyolult egyenlet egyszerűsítése, közös nevezőre hozás, vagy egyenlet-rendszer ekvivalens átalakítása.
- Geometriai ábrázolás: Egy térbeli probléma kétdimenziós ábrázolásra való leegyszerűsítése.
- Problémák újrafogalmazása: A probléma más kontextusba helyezése, például absztrakt algebrai kérdés megoldása gráfelméleti eszközökkel (Mason, Burton, & Stacey, 2010).

Az ekvivalens transzformáció különösen fontos szerepet játszik a tanulási folyamatban, mert segít a tanulóknak a különböző reprezentációk közötti átmenetek megértésében (Duval, 2006). Ez a képesség elengedhetetlen a matematikai gondolkodás fejlesztésében, mivel lehetővé teszi a problémák különböző nézőpontokból való megközelítését.

Az ekvivalens transzformáció különösen hasznos eszköz a matematikai oktatásban, mivel segíti a tanulókat abban, hogy a problémák lényegét különböző nézőpontokból is megértsék. Ez fejleszti az analitikus gondolkodást, és lehetővé teszi a tanulók számára, hogy komplex helyzetekben is kreatív módon keressenek megoldást (Pólya, 1945; Mason et al., 2010). Az átalakítás képessége azt is erősíti, hogy a tanulók különböző matematikai területek közötti összefüggéseket felismerjék (Duval, 2006). Egyes kutatók, például Bruner (1966), hangsúlyozzák, hogy a tanulók először konkrét, majd ikonikus, végül szimbolikus reprezentációkon keresztül érthetik meg legjobban a matematikai problémák lényegét. Ez az átmenet szintén az ekvivalens transzformáció elvére épül, amely az absztrakt gondolkodást erősíti.

2.5 A táblázatos betűrendezési feladat

A táblázatos betűrendezési feladat egy olyan matematikai-logikai probléma, amelyben egy adott hálózatszerű mátrixban kell megtalálni az összes olyan lehetséges útvonalat, amely egy előre meghatározott szabály szerint rendezett karakterláncot vagy szót alkot. A feladat számos matematikai és kognitív területen alkalmazható, például gráfelméletben, algoritmusok tervezésében, valamint az óvodai és általános iskolai oktatásban, ahol segíti a gyerekek logikai gondolkodásának, mintázatfelismerésének és problémamegoldó képességeinek fejlesztését.

Egy táblázatot képzelünk el, amely $m \times n$ méretű, és celláiban betűk szerepelnek. A cél egy adott szó megtalálása az alábbi szabályok betartásával:

- Kiindulópont: a táblázat bal felső sarka.
- Irányított mozgás: A mozgás megengedett az egymással szomszédos cellák között (vízszintesen jobbra és függőlegesen lefelé).
- Egyszeri látogatás: Egy cella egy adott útvonalban csak egyszer látogatható meg.
- Szabályos karakterlánc: Az útvonalon haladva a betűk sorrendje meg kell, hogy feleljen az előre definiált karakterláncnak.

A táblázatos betűrendezési feladat megoldásához többféle stratégia áll rendelkezésre. A teljesség igénye nélkül, csak azokat a stratégiákat említjük, amelyeket a tanulók könnyen megértenek és élvezettel alkalmaznak.

Az egyik legegyszerűbb megoldási stratégia a brute force keresés, amely lényege, hogy megpróbáljuk felépíteni az összes lehetséges útvonalat, amely megfelel a szabályoknak. A brute force keresés a következő lépésekből áll:

- Induljunk ki a táblázat bal felső sarkában található cellából, amelyben a keresett szó első karaktere található.
- Keressük meg az első cellából azt, amely tartalmazza az adott szó második karakterét és a kiinduló cellától közvetlenül jobbra, vagy alatta helyezkedik el.
- Folytassuk az útvonal követését, amíg el nem érünk a szó végéhez.
- Jegyezzük fel a megtalált útvonalat.
- Zárjuk ki a már megtalált útvonalat és indítsuk el az algoritmust újból.

A brute force módszer magas időkomplexitása miatt az algoritmus nem alkalmas nagy dimenziójú problémák megoldására, de egyszerűsége miatt már óvodás korú gyerekek is elsajátíthatják és kisebb feladatokon élvezni tudják az útvonalak keresését.

A táblázatos betűrendezési feladatot ekvivalens kombinatorikai feladatként is tekinthetjük. Mivel a táblázatban a megfelelő betűkön vezető út hossza rögzített, mindig m lépést kell lefelé menni és n lépést jobbra. Az összes lehetséges lépések száma $m + n$. Jelöljük a jobb irányba történő lépést → jellel, még a le irányba történő lépést ↓ jellel. Ebben az esetben a betűk kiolvasása folyamán → és ↓ karakterekből álló $m + n$ hosszúságú sorozatot kapunk, amelyben m darab ↓ jel és n darab → jel található. Az ekvivalens feladat a következő módon fogalmazható meg: „Hányféle sorrendben rakható ki az adott sorozat?” A feladatot ismétléses permutációval lehet megoldani a

$$P_{m+n}^{m,n} = \frac{(n+m)!}{m!\,n!}$$

képlet segítségével.

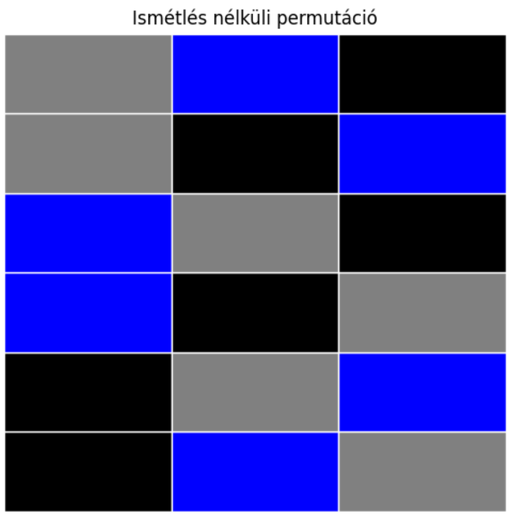
3. Az ismétléses permutációk tanítása

3.1 Ismétléses permutáció tanítása és gyakorlása középiskolában

A szerzők ebben a fejezetben bemutatják, hogyan vezethető be a középiskolások számára az ismétléses permutáció fogalma, és miként segítheti a tanár a tanulókat abban, hogy önállóan megalkossák az ismétléses permutáció képletét. A módszer alapfeltételezi, hogy a tanulók már ismerik az ismétlés nélküli permutációk fogalmát. A tanár példaként a következő, ismétlés nélküli permutációval kapcsolatos feladatot adhatja: (Stankov & Papp, 2024)

„Hányféleképpen lehet sorba rendezni három különböző színű filctollkupakot? Írd fel az összes lehetséges sorrendet.”

Mivel a tanulók már tisztában vannak az ismétlés nélküli permutációk alapjaival, képesek lesznek a rendezések szimbolikus reprezentációját táblázatos formában megjeleníteni az 1. ábra szerint (Stankov & Papp, 2024).



1. ábra: *A filctoll kupakok lehetséges sorrendje*

Miután kirakták az összes sorrendet, a diákok felírják az ismert ismétlés nélküli permutáció képletét: $P_3 = 3! = 6$, vagyis általános esetben $P_n = n!$. A tanár arra kéri a tanulókat, hogy rendezzék át a korábban kirakott sorrendeket az alábbi módon: az első két sorban a kék kupak legyen az első helyen, a harmadik és negyedik sorban a kék a középső helyen, az ötödik és hatodik sorban pedig a kék az utolsó helyen szerepeljen. Ezután megkérdezi, mi történne, ha a szürke filctoll kupak fekete színű lenne. Majd arra kéri őket, hogy ugyanazt a sorrendet állítsák elő, de a szürke kupak helyett egy második fekete kupakot használjanak. Miután a tanulók a 2. ábra szerint rendezték el a kék és két fekete kupakot, észreveszik, hogy a táblázat második sora megegyezik az elsővel, a negyedik a harmadikkal, a hatodik pedig az ötödikkel. Ebből a tanulók arra a következtetésre jutnak, hogy feleannyi permutáció lehetséges, ha a fekete kupak kétszer szerepel, mint amikor a három kupak különböző színű. A tanár a következő feladatokat adja, hogy segítsen a diákoknak megérteni, miért kell az ismétlés nélküli permutációk számát 2-vel osztani.

2. ábra: *Ismétléses permutáció*

„Hányféleképpen lehet sorba rendezni négy filctoll kupakot, ha három kupak színe megegyezik, még a negyedik különbözik?

A tanulók először négy különböző színű kupakkal állítják elő az összes lehetséges sorrendet. Fontos, hogy a négy kupak közül három hasonló árnyalatú legyen, míg a negyedik kupak eltérő színű. Miután a tanulók a 3. ábra szerint kirakták az összes lehetséges sorrendet, a tanár közösen megvitatja velük, mi történne, ha a hasonló árnyalatú kupakok teljesen egyszínűek lennének.

3. ábra: *Ismétléses permutáció*

A diákok a kirakott kupakok alapján észreveszik, hogy minden sorrend hatszor ismétlődik. Ez összefügg azzal, hogy három azonos színű kupak van, és csak egy eltérő. Ennek alapján felismerik, hogy az összes ismétlés nélküli permutáció számát el kell osztani az azonos színű kupakok sorrendjének számával, azaz $3! = 6$-tal. Annak érdekében, hogy megértsék, mi történik, ha több szín is ismétlődik, a tanár a következő feladatot adja:

„Hányféleképpen lehet sorba rendezni négy filctollkupakot, ha két kupak színe szürke, a másik kettő pedig kék?"

A tanulók először két különböző szürke és két különböző kék kupakkal dolgoznak, így négy különböző színű kupakkal állítják elő az összes lehetséges sorrendet. Miután kirakták az összes sorrendet, a tanár megkérdezi, mi történne, ha a két-két azonos árnyalatú kupak teljesen egyszínű lenne. Ekkor a tanulók ismét kirakják az összes sorrendet, ezúttal csak a két színt használva, ahogy a 4. ábra mutatja. A diákok észreveszik, hogy minden egyedi sorrend négyszer ismétlődik, mivel két azonos szürke és két azonos kék kupak van. Ennek megfelelően az összes ismétlés nélküli permutáció számát el kell osztani a szürke kupakok permutációinak számával ($2!=2$) és a kék kupakok permutációinak számával ($2! = 2$).

A tanulók felismerik, hogy az osztó attól függ, hány különböző színű csoportra lehet osztani a kupakokat, és minden csoport azonos elemeinek permutációs számával kell osztani az összes sorrendet. Így az összes lehetséges sorrend kiszámításához az összes ismétlés nélküli permutáció számát el kell osztani az egyes csoportok elemeinek faktoriálisával, az alábbiak szerint:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_l} = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \cdot k_l!}.$$

4. ábra: *Ismétléses permutáció, ha két -két szín megegyezik*

Miután a tanulók elsajátították az ismétléses permutációk fogalmát, gyakorlásként tanár feladhatja a táblázatos betűrendezési feladatot.

„Hányféleképpen olvashatjuk ki a "BUDAPEST" szót a 1. táblázatból, ha a táblázat bal felső sarkából indulunk, és csak jobbra, illetve le haladhatunk a táblázatban?”

1. táblázat: *Táblázatos betűrendezési feladat*

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

A tanár célja, hogy rávezesse a tanulókat, hogy ez a feladat felírható kombinatorikai feladatként. A rávezetésben segíthet egy útvonal bejelölése az 5. ábra szerint:

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

5. ábra: *Ekvivalens kombinatorikai feladat.*

Ha a tanulók nem jönnek rá, hogyan fogalmazható meg a feladat kombinatorikai problémaként, amelyben az ismétléses permutációk számát kell meghatározni, a tanár a nyilak segítségével bejelölhet egy további útvonalat. Több útvonal bejelölése után a tanulók felismerik, hogy: minden útvonal esetében a jobbra és lefelé mutató nyilak száma azonos. Ekkor a tanár felírja az ennek megfelelő kombinatorikai feladatot: „Hányféleképpen rakhatjuk sorba a $\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow$ karaktereket?” Mivel az ismétléses permutáció fogalmát a tanulók ismerik, meg tudják oldani ezt a feladatot is: $P_3^{4,3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$. A következő kérdés kulcsfontosságú: „Mi a kapcsolat a "BUDAPEST" szó kiolvasásai és a megadott karakterek (nyilak) sorba rendezése között?” A tanulók gyorsan belátják, hogy minden kiolvasásnak egy sorba rendezés felel meg és fordítva: minden sorba rendezésnek egy kiolvasás felel meg. Ezért a tanulók megfogalmazzák a következőt: a kiolvasások száma azonos a sorba rendezések számával, illetve azt, hogy mindkettő feladatnak azonos a megoldása. Diszkusszión keresztül, a tanulók megbeszélik, hogy az ilyen feladatokat egymásra át lehet fogalmazni és az eredeti feladat helyet, megoldhatjuk az átfogalmazott feladatot is, ha ez számunkra könnyebb. A tanár ismerteti a végén az ekvivalens problémák elnevezést.

3.2 Táblázatos betűrendezési feladat gyakorlása általános iskolás korban

Az ismétléses permutáció fogalmának bevezetése általános iskolában képlet segítségével nem ajánlott. Ugyanakkor a táblázatos betűrendezés feladat érdekes lehet a tanulók számára, és ha a tanár bemutatja a brute force módszer egy következő változatát, a diákok élvezettel foglalkozhatnak különböző dimenziójú feladatokkal. Az eljárás alapötlete a következő: minden táblázati mező két szomszédos oldala közé jobbra és lefelé mutató nyilakat kell rajzolni. Ezután, minden mezőbe be kell írni, hogy hány nyíl vezet az adott mezőbe. Végül a táblázat bal alsó sarkában lévő mezőbe kerülő szám az összes lehetséges útvonal számát adja meg, ahogyan azt a 6. ábra mutatja. A tanulók az eljárást követve tudat alatt egy brute force módszert alkalmaznak.

0 B	1 U	1 D	1 A	1 P
1 U	2 D	3 A	4 P	5 E
1 D	3 A	6 P	10 E	15 S
1 A	4 P	10 E	20 S	35 T

6. ábra: *Brute force módszer.*

Az általános iskolában bevezetett táblázatos betűrendezési feladat és az ehhez kapcsolódó eljárás kiváló alapot nyújthat a középiskolai tanulmányokhoz, amikor a tanár az ismétléses permutáció fogalmát ismerteti.

3.3 Táblázatos betűrendezési feladat gyakorlása óvodás korban

A táblázatos betűrendezési feladat bevezethető fiatal korban is, amikor a gyerekek nem tudnak jól, vagy egyáltalán nem tudnak olvasni. Ilyenkor a feladat célja módosul. A gyerekeknek nem kell az összes út számát meghatározni, hanem minél több utat megtalálni és kijelölni.

Első osztályban, a tanulók a táblázatos betűrendezési feladat következő változatát kapják:

„Keresd meg a 7. ábrán található táblázat útvonalait, amelyek a 8. ábrán látható színek és betűk sorozatát tartalmazza!"

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

7. ábra: *Táblázatos szín- és betűrendezési feladat*

B	U	D	A	P	E	S	T

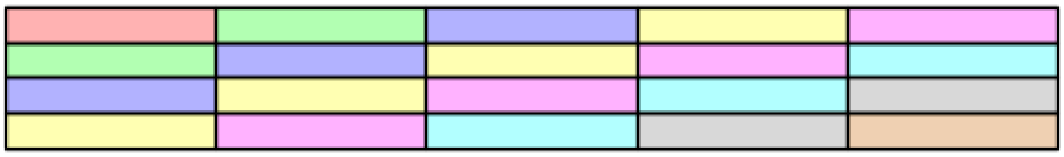
8. ábra: *Szín- és betűsorozat*

A feladat szerint a tanulóknak minél több lehetséges útvonalat kell megtalálniuk, ideális esetben az összeset. A tanár még érdekesebbé teheti a feladatot, ha a táblázatot színes papírokból állítja össze, és a tanulóknak gyalog kell bejárniuk az útvonalakat a padlóra terített táblázaton. A feladat papíron is izgalmas lehet, ha a tanulók a táblázaton megrajzolják és kiszínezik az útvonalakat. Az ilyen játékos tevékenység nemcsak a tanulók rendszerezési képességét fejlesztheti, hanem a kommunikációs készségeiket is, különösen csoportos munkavégzés során. Emellett a gyerekek a betűk felismerését is gyakorolhatják.

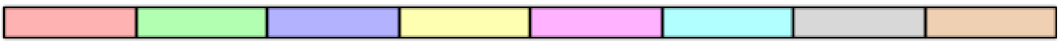
Óvodás korban, amikor a gyerekek még nem tudnak olvasni, a feladat könnyen módosítható. A betűrendezési feladat helyett színrendezési feladatként is alkalmazható, például így:

„Keresd meg a 9. ábrán látható táblázat útvonalait, amelyek megfelelnek a 10. ábrán bemutatott színsorozatnak!”

Ez a változat a színek és a mintázatok felismerését segíti elő, miközben a gyerekek logikai gondolkodását és megfigyelőképességét fejleszti.



9. ábra: *Táblázatos színrendezési feladat*



10. ábra: *Színsorozat*

A megoldási módszer ugyanaz marad, mint a táblázatos szín- és betűrendezési feladatnál.

4. Összefoglalás

A tanulmány részletesen bemutatja, hogyan használható a táblázatos betűrendezési feladat a matematikai és kognitív kompetenciák hatékony fejlesztésére óvodás és általános iskolás gyerekek körében. Az ismétléses permutációk fogalmának játékos és életkorhoz igazított megközelítése révén a kombinatorika tanítása közelebb hozható a tanulókhoz, csökkentve a témakörhöz kapcsolódó nehézségeket és elidegenedést.

A tanulmány kiemeli, hogy a hagyományosan absztrakt és nehezen érthető ismétléses permutációk intuitívabb megközelítésével jelentősen javítható a tanulók megértése és problémamegoldó készsége. A táblázatos betűrendezés feladat egy olyan gyakorlati eszköz, amely nemcsak a matematikai fogalmak elsajátítását segíti, hanem a logikai gondolkodás, a számolási készségek és a rendszerezési képesség fejlesztését is támogatja. Az óvodások számára a játékos formában történő bemutatás, míg az általános iskolások esetében az életkornak megfelelő, strukturált gyakorlatok különösen hatékonynak bizonyultak.

Irodalomjegyzék

Arcavi, A. (2009). The languages of mathematics (K. Subramarian, Ed.; Vol. 3). Macmillan Publishers India Ltd.

Bordner, G. M. (1986). Constructivism the theory of knowledge. Journal of Chemical Education, 65, 873–878.

Brooks, J. G., & Brooks, M. G. (1993). In search of understanding: the case for constructivist classrooms. Association for Supervision and Curriculum Development.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Belkapp Press.

Chan, & Chan. (2023). Examining the learning effects of concrete and abstract materials among university students using a two-dimensional approach. British Journal of Educational Psychology, 93, 4.

Dogru, M., & Kalender, S. (2007). Applying the subject “Cell” through constructivist approach during science lessons and the teacher’s view. International Journal of Environmental & Science Education, 2, 1.

Duval, R. A. (2006). Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies, 61, 1.

Good, T. L., & Brophy, J. E. (1994). Looking in classrooms. Harper Collins College Publishers.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Representation: Learning with and about representation forms. The Phi Delta Kappan, 78, 5.

Haciomeroglu, Erhan S, Aspinwall, L., & Presmeg, N. C. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. Mathematical Thinking and Learning, 12, 152–176.

Hunt, A. W., Nipper, K. L., & Nash, L. E. (2011). Virtual vs. Concrete manipulatives in mathematics teacher education: Is one type more effective than the other? Current Issues in Middle Level Education, 16, 2.

Iran-Nejad, A. (1995). Constructivism as substitute for memorization in learning: meaning is created by learner. Education, 116, 16–32.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academy Press.

Mainali, B. (2019). Investigating the relationships between preferences, gender, task difficulty, and high school students' geometry performance. International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 5, 1.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). Thinking mathematically (2nd ed.). Pearson.

Miura, I. T. (2001). The influence of language on mathematical representation (A. A. Cuoco & F. R. Curcio, Eds.; pp. 53–62). National Council of Teachers of Mathematics.

Naylor, S., & Keogh, B. (1999). Constructivism in classroom: Theory into practice. Journal of Science Teacher Education, 10, 93–106.

Pálfi, É. (2015). Hogyan hivatkozzunk elektronikus forrásokra? http://bit.ly/1zFTRx3

Palmer, S. E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation (E. Rosch & B. B. Lloyd, Eds.; pp. 259–303). Lawrence Erlbaum Associates.

Pásztor, Kinga M. (2014). A nyelvészet matematikája. Létünk, 44, 4.

Pólya, Gy. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Pólya, Gy. (2009). Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving. Ishi Press.

Pólya, Gy. (2014). Mathematics and plausible reasoning. Martino Fine Books.

Samsuddin, Aziza F, & Retnawati, H. (2018). Mathematical representation: the roles, challenges and implication on instruction. In Journal of Physics: Conference Series (pp. 1–8).

Schoenfeld, A. H. (2014). Mathematical Problem Solving. Elsevier.

Siddikov, Z. Kh. (2022). Improving students mathematical competence by solving combinatorics problem. Web of Scientist: International Scientific Research Journal, 3(11).

Sjoberg, S. (2010). Constructivism and learning (E. Baker, B. McGaw, & P. Peterson, Eds.; pp. 485–495). Elsevier.

Stankov, G. (2014). Játszva tanuljuk a lineáris egyenletek megoldását mérlegelvvel (J. Szitányi, Ed.). ELTE.

Stankov, G., & Papp, Z. (2024). Kommunikáció a matematika nyelvén. 12. Nemzetközi Módszertani Konferencia, Tudomány És Kommunikáció, Tanulmánygyűjtemény, 84–92.

Taber, K. S. (2011). Constructivism as educational theory: contingency in learning, and optimality guided instruction (J. Hassaskhan, Ed.; pp. 39–61). Nova Science Publishers.

Tobin, K., & Tippins, D. (1993). Constructivism as a referent for teaching and learning (K. Tobin, Ed.; pp. 3–22). Lawrence Erlbaum Associates.

Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. Cognitive Science, 21, 2.

DEVELOPING MATHEMATICAL AND COGNITIVE COMPETENCIES IN PRESCHOOL AND PRIMARY SCHOOL CHILDREN THROUGH TEACHING REPETITIVE PERMUTATIONS BASED ON LATTICE PATH PROBLEM TASKS

Abstract

The article presents how mathematical and cognitive competencies can be effectively developed through the teaching of combinatorics. The authors place particular emphasis on teaching repetition-based permutations and combinations without repetition for preschool and elementary school children, specifically in the context of lattice path problem tasks. The playful approach to solving lattice path problem tasks allows children to easily grasp complex mathematical concepts while also enhancing their logical thinking, counting skills, and memory. The article discusses in detail how this method can be adapted for children of different ages and presents practical steps, games, and exercises that make the concept of permutations understandable. The results confirm that teaching based on lattice path problem tasks strengthens mathematical skills while supporting children's cognitive development, particularly in problem-solving and logical thinking.

Keywords**:** *combinatorics, repetition-based permutations, lattice path problem, mathematical competency, playful learning*

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

371.13(082)
371.3(082)

УЧИТЕЉСКИ факултет на мађарском наставном језику. Међународна методичка конференција (13 ; 2024 ; Суботица)
Компетенције [Електронски извор] : зборник радова = Kompetenciák : tanulmánygyűjtemény / 13. међународна методичка конференција, Суботица, 7-8. новембар 2024. = 13. Nemzetközi Módszertani Konferencia, Szabadka, 2024. november 7-8. ; [уредник Márta Törteli Telek]. - Суботица : Учитељски факултет на мађарском наставном језику, 2024

Начин приступа (URL): https://magister.uns.ac.rs/publ/2024/978-86-81960-32-5. - Начин приступа (URL): https://magister.uns.ac.rs/Kiadvanyaink/. - Начин приступа (URL): https://magister.uns.ac.rs/Публикације/. - Насл. са насловног екрана. - Опис заснован на стању на дан 30.01.2025. - Радови на мађ., хрв. и енгл. језику. - Библиографија уз сваки рад. - Summaries.

ISBN 978-86-81960-32-5

а) Учитељи -- Образовање -- Зборници б) Васпитачи -- Образовање -- Зборници в) Учитељи -- Компетенције -- Зборници г) Васпитачи -- Компетенције -- Зборници д) Настава -- Методика -- Зборници

COBISS.SR-ID 162035721